LIF11 Logique - TD3

CNF et Résolution

Exercice 1:

On appelle *littéral* une formule réduite à une variable p (littéral positif) ou la négation d'une variable $\neg p$ (littéral négatif). Soit $L = \neg p$ un littéral négatif. Alors on assimilera $\neg L$ au littéral positif p.

Une clause est une formule de la forme $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ où $L_1, \ldots, L_n$ sont des littéraux. Si $n = 0$, alors par convention la clause est la formule $\perp$. Une formule en forme normale conjonctive (également appelées FNC ou CNF) est une formule de la forme $C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ où $C_1, \ldots, C_m$ sont des clauses. Si $m = 0$, alors par convention la formule est $\top$.

Étant donnée une formule A, il est toujours possible de trouver une CNF A' telle que A est satisfiable si et seulement si A' est satisfiable (on dit alors que A et A' sont équi-satisfiables).

Une telle formule peut être obtenue par la transformation de Tseitin. Cette transformation s'appuie sur la fonction $tseitin(A)$ qui renvoie une paire (L, A'') où L est un littéral et A'' est une CNF. $tseitin(A)$ est inductivement définie comme suit :

- $tseitin(p) = (p, \top)$
- $tseitin(\top) = (q, q)$ avec q une variable fraîche [1].
- $tseitin(\perp) = (q, \neg q)$ avec q une variable fraîche.
- Si $tseitin(A) = (L, A'')$, alors $tseitin(\neg A) = (\neg L, A'')$.
- Si $tseitin(A) = (L_A, A'')$, si $tseitin(B) = (L_B, B'')$ et si q est une variable fraîche, alors :
  - $tseitin(A \vee B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (\neg L_A \vee q) \wedge (\neg L_B \vee q) \wedge (\neg q \vee L_A \vee L_B)\ )$
  - $tseitin(A \wedge B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (\neg L_A \vee \neg L_B \vee q) \wedge (\neg q \vee L_A) \wedge (\neg q \vee L_B)\ )$
  - $tseitin(A \Rightarrow B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (L_A \vee q) \wedge (\neg L_B \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg L_A \vee L_B)\ )$
  - $tseitin(A \Leftrightarrow B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (\neg q \vee \neg L_A \vee L_B) \wedge (\neg q \vee L_A \vee \neg L_B) \wedge (q \vee L_A \vee L_B) \wedge (q \vee \neg L_A \vee \neg L_B)\ )$

Si $(L_A, A'') = tseitin(A)$, alors $A' = A'' \wedge L_A$ est satisfiable si et seulement si A est satisfiable.

Utiliser la transformation de Tseitin pour obtenir des CNF équi-satisfiables à chacune des formules suivantes :

- $\neg p$
- $p \wedge r$
- $p \Leftrightarrow (p \wedge r)$
- $(p \wedge r) \vee (\neg p \vee \neg r)$

Exercice 2:

Montrer par résolution que l'ensemble de clauses suivant est contradictoire :

$$\{p \vee q, \neg p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q\}$$

Exercice 3:

Un meurtre a été commis au laboratoire, le corps se trouve dans la salle de conférences. On dispose des informations suivantes :

[1] c'est à dire une nouvelle variable, jamais rencontrée jusqu'ici. Comme l'ensemble des variables est infini, on peut toujours trouver une variable fraîche.

– La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
– Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
– L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu

On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment. Pour cela on utilise les variables propositionnelles suivantes :

– p est vraie si la secrétaire dit la vérité
– q est vraie si l'ingénieur dit la vérité
– r est vraie si l'ingénieur était dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
– s est vraie si l'ingénieur était dans une pièce voisine de la salle de conférences
– t est vraie si l'ingénieur a entendu le coup de feu

1. Traduire les informations précédentes en 4 formules en utilisant les variables ci-dessus. Traduire également la conclusion à démonter en formule.
2. Regrouper ensuite ces formules en une seule formule A résumant le problème.
3. Transformer la négation $\neg A$ de cette formule en forme conjonctive.
4. Montrer, grâce à la méthode de résolution, que $\neg A$ est insatisfiable.
5. Que peut-on en déduire à propos de A et du problème de départ ?
6. (facultatif) Utiliser les formules trouvée en 1. pour écrire un séquent correspondant au problème et montrer que ce séquent est correct en utilisant le système $\mathcal{G}$.

Exercice 4:

On considère la fonction $resolv(A, B)$ qui, étant données deux clauses A et B donne l'ensemble des clauses qui sont des résolvantes de A et B. On considère également la fonction suivante, où E est un ensemble de clauses :

$$\mathcal{R}(E) = \{C \mid C \in resolv(A, B), A \in E \text{ et } B \in E\}$$

On considère la suite $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $E_0 = E$ et $E_{i+1} = E_i \cup \mathcal{R}(E_i)$.

1. Montrer que pour tout $m \leq n$, $E_m \subseteq E_n$
2. Montrer que la suite admet un point fixe $\mathcal{R}^{\uparrow}(E)$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre m tel que pour tout $n \geq m$, $E_m = E_n$. Indice : considérer l'ensemble des clauses possibles que l'on peut construire avec les littéraux qui apparaissent dans E.
3. Un arbre de résolution partiel pour E est un arbre binaire dont les noeuds sont des clauses et vérifiant les conditions suivantes :
   – un noeud interne est une résolvante (des racines) de ses fils
   – les feuilles sont des éléments de E

   Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, toute clause $C \in E_i$ est la racine d'un arbre de résolution partiel pour E.
4. Montrer que pour tout arbre de résolution partiel $\mathcal{A}$ pour E, la racine de $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{R}^{\uparrow}(E)$. On fera cette démonstration par induction sur la structure de ces arbres, en remarquant pour le cas des feuilles que $E_0 = E \subseteq \mathcal{R}^{\uparrow}(E)$.
5. Montrer à l'aide de 3. et 4. que E admet un arbre de résolution si et seulement si $\mathcal{R}^{\uparrow}(E)$ contient la clause vide $\square$.
6. Donner un algorithme de test de satisfiabilité basé sur le calcul de $\mathcal{R}^{\uparrow}(E)$ et montrer la correction de cet algorithme en utilisant 5.