LIFLC Logique classique TD 5

Syntaxe du calcul des prédicats

Exercice 1:

On considère l'alphabet suivant :
- Symboles de fonction : $f/2$, $g/1$
- Constantes : a, b
- Symboles de prédicats : $p/1$, $q/2$

On considère les suites des symboles suivantes :
- $g(f(x, y)) \vee p(a)$
- $\exists x\ q(a, y) \wedge p(f(a, b)) \Rightarrow p(x)$
- $\forall x \exists y\ p(x) \wedge q(f(y, b))$
- $p(g(z)) \vee \forall x \exists z\ q(a, y)$
- $\exists x\ q(f(x, y), g(z))$
- $\forall y \forall x\ q(x, y)$

1. Quelles sont les suites de symboles qui ne sont pas des formules ?
2. Donner l'ensembles des variables libres et l'ensemble des variables liées de chaque formule.

Exercice 2:

On considère l'alphabet :
- Constantes : `titi`, `sylvestre`, `tom`, `jerry`, `spike`
- Symboles de prédicats : `souris`/1, `canari`/1, `chat`/1, `chien`/1, `chasse`/2.

Donner des formules exprimant chacune des propriétés ci-dessous (une proie est un individu qui est chassé par un autre, un prédateur est un individu qui en chasse un autre) :
- Titi a un prédateur.
- Les chats qui chassent les canaris ne chassent pas les souris.
- Spike est un prédateur d'un prédateur de Jerry.
- x est une proie mais pas un prédateur.
- x a un prédateur unique.
- x n'est chassé par personne.
- Tous les chasseurs sont des proies.
- Tous les chats sont chasseurs et proies.
- Sylvestre et Tom ne chassent pas les mêmes proies.

Exercice 3:

On considère l'alphabet :
- Constantes : `r`, `b`, `j`
- Symboles de fonction : `suiv`/1, `prec`/1
- Symboles de prédicat : `compose`/3, `opposes`/2

la structure d'interprétation $\mathcal{SI}$:
- Univers : $E = \{Jaune, Rouge, Orange, Bleu, Vert, Violet, Noir, Blanc\}$
- Interprétation :
  - $I(\texttt{r}) = Rouge$, $I(\texttt{b}) = Bleu$, $I(\texttt{j}) = Jaune$
  - $I(\texttt{suiv}) = Rouge \mapsto Orange, Orange \mapsto Jaune, Jaune \mapsto Vert, Vert \mapsto Bleu, Bleu \mapsto Violet, Violet \mapsto Rouge, Noir \mapsto Blanc, Blanc \mapsto Noir$
  - $I(\texttt{prec}) = Orange \mapsto Rouge, Jaune \mapsto Orange, Vert \mapsto Jaune, Bleu \mapsto Vert, Violet \mapsto Bleu, Rouge \mapsto Violet, Blanc \mapsto Noir, Noir \mapsto Blanc$

- $I(\texttt{compose})$: $e_1, e_2, e_3 \mapsto V$ si le triplet (e_1, e_2, e_3) est dans l'ensemble suivant :$\{(Bleu, Jaune, Vert), (Jaune, Bleu, Vert), (Rouge, Bleu, Violet),$ $(Bleu, Rouge, Violet), (Jaune, Rouge, Orange), (Rouge, Jaune, Orange)\}$
- $I(\texttt{oppose})$: $e_1, e_2 \mapsto V$ si la paire (e_1, e_2) est dans l'ensemble $\{(Jaune, Violet),$ $(Violet, Jaune),$ $(Vert, Rouge),$ $(Rouge, Vert),$ $(Bleu, Orange),$ $(Orange, Bleu),$ $(Noir, Blanc),$ $(Blanc, Noir)\}$

ainsi que l'affectation de valeurs au variables ζ suivante : $\zeta(x) = Noir$, $\zeta(y) = Bleu$, $\zeta(z) = Rouge$, $\zeta(u) = Violet$

Évaluer la valeur de vérité des formules suivantes par rapport à $\mathcal{SI}$ et ζ :

- $x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)$
- $\texttt{suiv}(\texttt{suiv}(z)) \doteq \texttt{j} \wedge \texttt{suiv}(\texttt{suiv}(\texttt{j})) \doteq y$

Pour chacune des formules suivantes, dire si $\mathcal{SI}$ en est un modèle :

- $\forall x \forall y\ \texttt{suiv}(x) \doteq y \Leftrightarrow \texttt{prec}(y) \doteq x$
- $\forall x\ \texttt{opposes}(x, \texttt{suiv}(\texttt{suiv}(\texttt{suiv}(x))))$
- $\forall x \forall y\ \texttt{suiv}(\texttt{suiv}(x)) \doteq y \Rightarrow x \doteq \texttt{suiv}(\texttt{suiv}(\texttt{suiv}(\texttt{suiv}(y))))$
- $\forall x \exists y\ (\ \texttt{opposes}(x, y) \vee x \doteq y\ ) \wedge \texttt{compose}(\texttt{prec}(y), \texttt{suiv}(y), y)$