LIF11 Logique - TD Révision
Correction

Exercice 1:

Dire si les formules suivantes sont satisfiables et/ou valides. Dans le cas où une formule est valide, on le démontrera en utilisant la résolution (plus présisement, on montrera que $\neg A$ est insatisfiable), puis en utilisant le système $\mathcal{G}$.

- $p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$
  Correction:
  La formule est satisfiable (prendre $I(p) = V$ et $I(q) = V$), mais n'est pas valide (prendre $I(p) = F$ et $I(q) = V$)
- $p \vee q \Rightarrow (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$
  Correction:
  La formule est valide
  Preuve par résolution :

$$\begin{array}{rl} & \neg(\ p \vee q \Rightarrow (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)\ ) \\ \equiv & \neg(\ \neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)\ ) \\ \equiv & (p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge q) \\ \equiv & (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \end{array}$$

Ici, on présente la résolution sous forme d'une série de combinaisons de formules $A, B \leadsto C$, où C est une résultante de A et B.

$$\begin{array}{rcl} p \vee q\ ,\ p \vee \neg q & \leadsto & p \\ \neg p \vee q\ ,\ \neg p \vee \neg q & \leadsto & \neg p \\ p\ ,\ \neg p & \leadsto & \Box \end{array}$$

Preuve en système $\mathcal{G}$ (les symboles soulignés indiquent les formules sur lesquelles les règles sont appliquées) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(Ax)\, q, \underline{p} \vdash \underline{p} \wedge \neg q, p}{q \vdash \underline{\neg} p, p \wedge \neg q, p}(\neg_D) \quad (Ax)\, \underline{q} \vdash \neg p, p \wedge \neg q, \underline{q}}{q \vdash \neg p, p \wedge \neg q, p \underline{\wedge} q}(\wedge_D) \quad (Ax)\, \underline{q} \vdash \underline{q}, p \wedge \neg q, p \wedge q}{\underset{(1)}{q \vdash \neg p \underline{\wedge} q, p \wedge \neg q, p \wedge q}}(\wedge_D)$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\underline{p} \vdash \neg p \wedge q, \underline{p}, p \wedge q}(Ax) \quad \dfrac{\overline{\underline{p} \vdash \neg p \wedge q, \neg q, \underline{p}}(Ax) \quad \dfrac{\overline{p, \underline{q} \vdash \neg p \wedge q, \underline{q}}(Ax)}{p \vdash \neg p \wedge q, \underline{\neg} q, q}(\neg_D)}{p \vdash \neg p \wedge q, \neg q, p \underline{\wedge} q}(\wedge_D)}{p \vdash \neg p \wedge q, p \underline{\wedge} \neg q, p \wedge q}(\wedge_D) \quad \begin{array}{c}\vdots \\ (1)\end{array}}{p \underline{\vee} q \vdash \neg p \wedge q, p \wedge \neg q, p \wedge q}(\vee_G)}{\dfrac{p \vee q \vdash (\neg p \wedge q) \underline{\vee} (p \wedge \neg q) \underline{\vee} (p \wedge q)}{\vdash p \vee q \underline{\Rightarrow} (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)}(\Rightarrow_D)}(\vee_D) \times 2$$

- $(q \vee (r \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge q)) \wedge (s \vee p \vee (\neg s \wedge \neg p))$
  Correction:
  La formule est satisfiable (prendre $I(q) = V$) mais pas valide (prendre $I(q) = F$ et $I(r) = F$).
- $(p \wedge s) \vee (q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (s \vee r)$
  Correction:
  La formule est valide
  Preuve par résolution :

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\neg(\ (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (s \vee r)\ )} \\
\equiv & \neg(\neg((p \wedge s) \vee (q \wedge r)) \vee (p \vee q) \wedge (s \vee r)\ ) \\
\equiv & ((p \wedge s) \vee (q \wedge r)) \wedge \neg((p \vee q) \wedge (s \vee r)) \\
\equiv & ((p \wedge s) \vee (q \wedge r)) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg s \wedge \neg r)) \\
\equiv & (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (s \vee q) \wedge (s \vee r) \\
 & \wedge(\neg p \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge (\neg q \vee \neg r)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
s \vee r\ ,\ \neg p \vee \neg r & \rightsquigarrow & s \vee \neg p \\
\neg p \vee \neg s\ ,\ s \vee \neg p & \rightsquigarrow & \neg p \\
p \vee q\ ,\ \neg q \vee \neg r & \rightsquigarrow & p \vee \neg r \\
p \vee \neg r\ ,\ p \vee r & \rightsquigarrow & p \\
\neg p\ ,\ p & \rightsquigarrow & \square
\end{array}
$$

  Preuve en système $\mathcal{G}$ (les symboles soulignés indiquent les formules sur lesquelles les règles sont appliquées) :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(Ax) p, s \vdash p, q}{p, s \vdash p \underline{\vee} q}(\vee_D)}{p \underline{\wedge} s \vdash p \vee q}(\wedge_G) \quad \dfrac{\dfrac{(Ax) q, r \vdash p, q}{q, r \vdash p \underline{\vee} q}(\vee_G)}{q \underline{\wedge} r \vdash p \vee q}(\wedge_G)}{(p \wedge s) \underline{\vee} (q \wedge r) \vdash p \vee q}(\vee_G) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(Ax) p, s \vdash s, r}{p, s \vdash s \underline{\vee} r}(\vee_D)}{p \underline{\wedge} s \vdash s \vee r}(\wedge_G) \quad \dfrac{\dfrac{(Ax) q, r \vdash s, r}{q, r \vdash s \underline{\vee} r}(\vee_G)}{q \underline{\wedge} r \vdash s \vee r}(\wedge_G)}{(p \wedge s) \underline{\vee} (q \wedge r) \vdash s \vee r}(\vee_G)}{(p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \underline{\wedge} (s \vee r)}(\wedge_D)}{\vdash (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \underline{\Rightarrow} (p \vee q) \wedge (s \vee r)}(\Rightarrow_D)
$$

Exercice 2:

Montrer qu'en calcul propositionnel :
- $\models A \Leftrightarrow B$ si et seulement si $A \equiv B$
  Correction:
  Il suffit de montrer que $[A \Leftrightarrow B]_I = V$ pour toute interprétation I si et seulement si pour toute interprétation I, $[A]_I = [B]_I$.
  Supposons que pour toute interprétation I, $[A \Leftrightarrow B]_I = V$. Soit I une interprétation quelconque. On a $[A \Leftrightarrow B]_I = V$. D'après la table de vérité de $\Leftrightarrow$, on a forcément $[A]_I = [B]_I$.
  Supposons que pour toute interprétation I, $[A]_I = [B]_I$. Soit I une interprétation quelconque. Comme $[A]_I = [B]_I$, et D'après la table de vérité de $\Leftrightarrow$, on a forcément $[A \Leftrightarrow B]_I = V$.
- $\models A \Rightarrow B$ si et seulement si $A \models B$
  Correction:
  Il suffit de montrer que $[A \Rightarrow B]_I = V$ pour toute interprétation I si et seulement si pour toute interprétation I, $[B]_I = V$ lorsque $[A]_I = V$.
  Supposons que $[A \Rightarrow B]_I = V$ pour toute interprétation I. Soit I une interprétation quelconque. On doit montrer l'énoncé suivant : si $[A]_I = V$ alors $[B]_I = V$. On distingue deux cas :
  - Si $[B]_I = V$, alors il n'y a rien a démontrer.
  - Si $[B]_I = F$, comme $[A \Rightarrow B]_I = V$, on a forcément $[A]_I = F$, et donc l'énoncé est vérifié.

Supposons que pour toute interprétation I, si $[A]_I = V$ alors $[B]_I = V$. Soit I une interprétation quelconque. Il faut montrer que $[A \Rightarrow B]_I = V$. On distingue deux cas :
- Si $[A]_I = V$, alors $[B]_I = V$, et donc $[A \Rightarrow B]_I = V$.
- Si $[A]_I = F$, alors $[A \Rightarrow B]_I = V$.

Exercice 3: Logique du premier ordre

On considère l'alphabet suivant :
- Constantes : pierre, jacques, sylvie
- Symboles de fonctions : pere/1, mere/1
- Symboles de prédicats : homme/1, femme/1, ancetre_de/2

Trouver des formules logiques exprimant les propriétés ci-dessous :
- x est le grand-père de y.
  Correction:
  $\exists z\ (z \doteq pere(y) \vee z \doteq mere(y)) \wedge x \doteq pere(z)$
- Sylvie est la soeur de Pierre.
  Correction:
  $pere(sylvie) \doteq pere(pierre) \wedge mere(sylvie) \doteq mere(pierre) \wedge femme(sylvie)$
- Sylvie et Jacques sont cousins (germains).
  Correction:
  $\exists x \exists y\ (x \doteq pere(sylvie) \vee x \doteq mere(sylvie)) \wedge (y \doteq pere(jacques) \vee y \doteq mere(jacques)) \wedge pere(x) \doteq pere(y) \wedge mere(x) \doteq mere(y)$
- Sylvie et Jacques sont cousins : ils ne sont pas ancêtres l'un de l'autre, ni frère ou soeur, ni frere ou soeur d'un l'ancêtre de l'autre (i.e. ((arrière)grand) (oncle/tante)), mais ont un ancêtre en commun.
  Correction:
  $\neg ancetre\_de(sylvie, jacques) \wedge \neg ancetre\_de(jacques, sylvie) \wedge \neg(\exists y\ (y \doteq sylvie \vee ancetre\_de(y, sylvie)) \wedge ((pere(y) \doteq pere(jacques) \vee mere(y) \doteq mere(jacques)))) \wedge \neg(\exists y\ (y \doteq jacques \vee ancetre\_de(y, jacques)) \wedge ((pere(y) \doteq pere(sylvie) \vee mere(y) \doteq mere(sylvie)))) \wedge (\exists x\ ancetre\_de(x, jacques) \wedge ancetre\_de(x, sylvie))$
- Pierre et Jacques sont demi-frères.
  Correction:
  $(pere(pierre) \doteq pere(jacques) \wedge \neg mere(pierre) \doteq mere(jacques)) \vee (\neg pere(pierre) \doteq pere(jacques) \wedge mere(pierre) \doteq mere(jacques))$
- Pierre a un seul frère et une seule soeur.
  Correction:
  $(\exists x\ \neg x \doteq pierre \wedge pere(x) \doteq pere(pierre) \wedge mere(x) \doteq mere(pierre) \wedge homme(x) \wedge ((\forall y\ \neg y \doteq pierre \wedge pere(y) \doteq pere(pierre) \wedge mere(y) \doteq mere(pierre) \wedge homme(y)) \Rightarrow y \doteq x)) \wedge (\exists x\ \neg x \doteq pierre \wedge pere(x) \doteq pere(pierre) \wedge mere(x) \doteq mere(pierre) \wedge femme(x) \wedge ((\forall y\ \neg y \doteq pierre \wedge pere(y) \doteq pere(pierre) \wedge mere(y) \doteq mere(pierre) \wedge femme(y)) \Rightarrow y \doteq x))$

Exercice 4:

Soit t un terme et σ une substitution tels que $t\sigma = t$ et tel qu'il n'existe pas $x \in dom(\sigma)$ tel que $\sigma(x) = x$. Montrer par induction sur les termes que les variables substituées par σ (i.e. $dom(\sigma)$) n'apparaissent pas dans t.

Correction:

On procède par cas :
- Si t est une variable x, et si $x\sigma = x$, alors on a forcément que x n'est pas substitué par σ.
- Sinon t est de la forme $f(t_1, \ldots, t_n)$, éventuellement avec $n = 0$. Par définition on a $t\sigma = f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$. Comme on suppose que $t\sigma = t$, on a $f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma) = f(t_1, \ldots, t_n)$, c'est-à-dire que pour $1 \leq i \leq n$, $t_i\sigma = t_i$. Soit x une variable substituée par σ.

Par hypothèse d'induction, x n'apparaît pas dans les t_i. Donc x n'apparaît pas dans t.

Règles du système $\mathcal{G}$

$$(\vee_G) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee_D) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\wedge_G) \quad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge_D) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\Rightarrow_G) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow_D) \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg_G) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(Axiome) \quad \frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$