LIF11 - TD2

Exercice 1:

Un prisonnier doit choisir entre deux cellules dont l'une cache une princesse et l'autre un tigre. S'il choisit la princesse, il doit l'épouser, mais s'il tombe sur le tigre, il est dévoré. A noter que les deux cellules peuvent contenir un tigre, ou les deux cellules une princesse.

Sur l'une des portes (la porte A), l'affiche indique: "Il y a une princesse dans cette cellule et un tigre dans l'autre"; sur la deuxième porte (la porte B), il est écrit: "Il y a une princesse dans une cellule et il y a un tigre dans une cellule". Il faut encore noter qu'une affiche dit la vérité et que l'autre ment. Ecrire une formule qui permet de représenter la situation et en déduire quelle porte le prisonnier doit ouvrir (*i.e.* ce qu'il y a dans chacune de ces cellules).

Variation: l'affiche de la cellule A dit la vérité s'il y a une princesse dans la cellule A, elle ment s'il y a un tigre. Pour la cellule B, c'est l'inverse: s'il y a un tigre, elle dit la vérité, s'il y a une princesse, elle ment. Voici donc les deux affiches. L'une dit: "Les deux cellules contiennent des tigres" et l'autre: "Cette cellule contient un tigre". Quelle porte choisir?

Exercice 2:

Pour chacune des fonctions f_1 et f_2, donner une formule qui la réalise. On pourra éventuellement pour cela suivre la méthode suggérée à travers la démonstration du fait que $\{\top, \bot, \neg, \wedge, \Rightarrow, \vee\}$ est fonctionnellement complet.

x	y	z	$f_1(x, y, z)$	$f_2(x, y, z)$
V	V	V	V	F
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

Exercice 3:

Soient les substitutions suivantes:

- $\sigma_1 = [{}^{u \vee v}/_{p}, {}^{u \Rightarrow v}/_{q}]$
- $\sigma_2 = [{}^{u \Leftrightarrow \neg v}/_{p}, {}^{v \wedge u}/_{q}, {}^{\neg(u \vee v)}/_{r}]$
- $\sigma_3 = [{}^{v}/_{p}, {}^{u \wedge v}/_{q}, {}^{u}/_{r}]$

Donner le résultat de l'application de σ_1, σ_2 et σ_3 sur les formules suivantes:

- $A = (p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q$
- $B = (p \vee q \vee r)$
- $C = (r \Rightarrow (p \vee q)) \wedge (p \Leftrightarrow q \wedge r)$

Donner la table de vérité des formules qui apparaissent dans σ_1, σ_2 et σ_3, ainsi que celle des formules A, B et C.

En utilisant les tables de vérité précédentes, donner la table de vérité de $A\sigma_1$, $B\sigma_2$ et $C\sigma_3$.

Exercice 4: Additionneur binaire

Un additionneur binaire est un circuit électronique permettant de réaliser des additions sur des entier positifs écrit en base 2. Un additionneur additionnant des nombres codés sur n bits possède $2 \times n$ entrées et $n+1$ sorties (en effet, en binaire $10 + 10 = 100$).

On souhaite vérifier un additionneur binaire en contrôlant ses sorties en fonction de ses entrées. L'additionneur est représenté par $n+1$ formules $A_1, \dots, A_{n+1}$ ayant $2n$ variables représentant les entrées du circuit et telle que valeur de vérité de A_k correpond à la valeur de la k^{ieme} sortie.

1. Donner la table de vérité de deux fonctions pour l'addition de 3 bits:
   - la première calcule la somme des 3 bits sans retenue (i.e. $1 + 1 + 1 \mapsto 1$);
   - la second calcule la retenue de cette somme.
2. Donner deux formules réalisant ces fonctions.
3. En déduire les formules spécifiant les sorties d'un additionneur 2 bits. On considère que les entier sont représentés avec le bit de poids faible ayant le plus petit indice, que le premier entier est représenté par p_1, p_2 et que le second est représenté par q_1, q_2.
4. Généraliser la construction précédente pour donner une manière de construire les formules de spécification des sorties d'un additionneur n bits.
5. Expliquer comment on peut utiliser ces formules avec les formules $A_1, \dots, A_{n+1}$ afin de vérifier que l'additionneur est correct.

Exercice 5:

Démontrer que les séquents suivants sont corrects en utilisant le système $\mathcal{G}$ puis en utilisant le système $\mathcal{LK}$:

- $(p \Rightarrow q) \wedge p \vdash q$
- $\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
- $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$
- $\vdash p \vee (q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Exercice 6:

Montrer que les règles (A_G) et (C_D) du système $\mathcal{LK}$ sont correctes. Montrer que la règle $(\vee_D)$ du système $\mathcal{G}$ et la règle $(\Rightarrow_G)$ du système $\mathcal{LK}$ sont correctes.

Exercice 7:

Montrer que les règles $(\wedge_G^1)$ et $(\wedge_G^2)$ du système $\mathcal{LK}$ peuvent être remplacées par la règle $(\wedge_G)$ du système $\mathcal{G}$.

Montrer que la règle $(\Rightarrow_G)$ du système $\mathcal{LK}$ peut être remplacée par celle du système $\mathcal{G}$.

Règles du système $\mathcal{LK}$

$$(A_G)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad\qquad (A_D)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

$$(C_G)\quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad\qquad (C_D)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}$$

$$(\wedge_G^1)\quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$(\wedge_G^2)\quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge_D)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma' \vdash \Delta', B}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', A \wedge B}$$

$$(\vee_D^1)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\vee_G)\quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash \Delta, \Delta'}$$

$$(\vee_D^2)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\Rightarrow_G)\quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \qquad\qquad (\Rightarrow_D)\quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$$

$$(\neg_G)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D)\quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(Id)\quad \frac{}{A \vdash A}$$

$$(Coupure)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

Règles du système $\mathcal{G}$

$$(\vee_G)\quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee_D)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\wedge_G)\quad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge_D)\quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\Rightarrow_G)\quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow_D)\quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg_G)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D)\quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(Axiome)\quad \frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$