

LIF11 Logique - TD4

Correction

Exercice 1:

On considère l'alphabet suivant :

- Symboles de fonction : $f/2, g/1$
- Constantes : a, b
- Symboles de prédicats : $p/1, q/2$

On considère les suites des symboles suivantes :

- $g(f(x, y)) \vee p(a)$
- $\exists x q(a, y) \wedge p(f(a, b)) \Rightarrow p(x)$
- $\forall x \exists y p(x) \wedge q(f(y, b))$
- $p(g(z)) \vee \forall x \exists z q(a, y)$
- $\exists x q(f(x, y), g(z))$
- $\forall y \forall x q(x, y)$

1. Quelles sont les suites de symboles qui ne sont pas des formules ?

Correction:

- $g(f(x, y)) \vee p(a)$ n'est pas une formule car g est un symbole de fonction et pas un symbole de prédicat.
- $\forall x \exists y p(x) \wedge q(f(y, b))$ n'est pas une formule car l'arité de q est 2.

Pour la suite, on pose :

- $A = \exists x q(a, y) \wedge p(f(a, b)) \Rightarrow p(x)$
- $B = p(g(z)) \vee \forall x \exists z q(a, y)$
- $C = \exists x q(f(x, y), g(z))$
- $D = \forall y \forall x q(x, y)$

2. Donner l'ensembles des variables libres et l'ensemble des variables liées de chaque formule.

Correction:

- $FV(A) = \{y\}, BV(A) = \{x\}, \forall A = \forall y A$ et $\exists A = \exists y A$
- $FV(B) = \{y, z\}, BV(B) = \{x, z\}, \forall B = \forall y \forall z B$ et $\exists B = \exists y \exists z B$
- $FV(C) = \{y, z\}, BV(C) = \{x\}, \forall C = \forall y \forall z C$ et $\exists C = \exists y \exists z C$
- $FV(D) = \emptyset, BV(D) = \{x, y\}, \forall D = D$ et $\exists D = D$

Exercice 2:

On considère l'alphabet :

- Constantes : **titi, sylvestre, tom, jerry, spike**
- Symboles de prédicats : **souris/1, canari/1, chat/1, chien/1, chasse/2.**

Donner des formules exprimant chacune des propriétés ci-dessous (une proie est un individu qui est chassé par un autre, un prédateur est un individu qui en chasse un autre) :

- Titi a un prédateur.

Correction: $\exists x \text{chasse}(x, \text{titi})$

- Les chats qui chassent les canaris ne chassent pas les souris.

Correction: $\forall x (\text{chat}(x) \wedge (\exists y \text{chasse}(x, y) \wedge \text{canari}(y)) \Rightarrow (\exists z \text{chasse}(x, z) \wedge \text{souris}(z)))$

- Spike est un prédateur d'un prédateur de Jerry.

Correction: $\exists x \text{chasse}(\text{spike}, x) \wedge \text{chasse}(x, \text{titi})$

- x est une proie mais pas un prédateur.

Correction: $\exists y \text{chasse}(y, x) \wedge \neg \exists z \text{chasse}(x, z)$

- x a un prédateur unique.
Correction: $\exists y \text{chasse}(y, x) \wedge \forall z(\text{chasse}(z, x) \Rightarrow y \doteq z)$
- x n'est chassé par personne.
Correction: $\forall y \neg \text{chasse}(y, x)$
- Tous les chasseurs sont des proies.
Correction: $\forall x((\exists y \text{chasse}(x, y)) \Rightarrow (\exists z \text{chasse}(z, x)))$
- Tous les chats sont chasseurs et proies.
Correction: $\forall x(\text{chat}(x) \Rightarrow \exists y \exists z \text{chasse}(y, x) \wedge \text{chasse}(x, z))$
- Sylvestre et Tom ne chassent pas les mêmes proies.
Correction: $\forall x(\text{chasse}(\text{tom}, x) \Rightarrow \neg \text{chasse}(\text{sylvestre}, x))$

Exercice 3:

On considère l'alphabet :

- Constantes : r, b, j
- Symboles de fonction : $\text{suiv}/1, \text{prec}/1$
- Symboles de prédicat : $\text{compose}/3, \text{opposes}/2$

la structure d'interprétation \mathcal{SI} :

- Univers : $E = \{\text{Jaune}, \text{Rouge}, \text{Orange}, \text{Bleu}, \text{Vert}, \text{Violet}, \text{Noir}, \text{Blanc}\}$
- Interprétation :
 - $I(r) = \text{Rouge}, I(b) = \text{Bleu}, I(j) = \text{Jaune}$
 - $I(\text{suiv}) = \text{Rouge} \mapsto \text{Orange}, \text{Orange} \mapsto \text{Jaune}, \text{Jaune} \mapsto \text{Vert}, \text{Vert} \mapsto \text{Bleu}, \text{Bleu} \mapsto \text{Violet}, \text{Violet} \mapsto \text{Rouge}, \text{Noir} \mapsto \text{Blanc}, \text{Blanc} \mapsto \text{Noir}$
 - $I(\text{prec}) = \text{Orange} \mapsto \text{Rouge}, \text{Jaune} \mapsto \text{Orange}, \text{Vert} \mapsto \text{Jaune}, \text{Bleu} \mapsto \text{Vert}, \text{Violet} \mapsto \text{Bleu}, \text{Rouge} \mapsto \text{Violet}, \text{Blanc} \mapsto \text{Noir}, \text{Noir} \mapsto \text{Blanc}$
 - $I(\text{compose}) : e_1, e_2, e_3 \mapsto V$ si le triplet (e_1, e_2, e_3) est dans l'ensemble suivant : $\{(\text{Bleu}, \text{Jaune}, \text{Vert}), (\text{Jaune}, \text{Bleu}, \text{Vert}), (\text{Rouge}, \text{Bleu}, \text{Violet}), (\text{Bleu}, \text{Rouge}, \text{Violet}), (\text{Jaune}, \text{Rouge}, \text{Orange}), (\text{Rouge}, \text{Jaune}, \text{Orange})\}$
 - $I(\text{oppose}) : e_1, e_2 \mapsto V$ si la paire (e_1, e_2) est dans l'ensemble $\{(\text{Jaune}, \text{Violet}), (\text{Violet}, \text{Jaune}), (\text{Vert}, \text{Rouge}), (\text{Rouge}, \text{Vert}), (\text{Bleu}, \text{Orange}), (\text{Orange}, \text{Bleu}), (\text{Noir}, \text{Blanc}), (\text{Blanc}, \text{Noir})\}$

ainsi que l'affectation de valeurs aux variables ζ suivante : $\zeta(x) = \text{Noir}, \zeta(y) = \text{Bleu}, \zeta(z) = \text{Rouge}, \zeta(u) = \text{Violet}$

Évaluer la valeur de vérité des formules suivantes par rapport à \mathcal{SI} et ζ :

- $x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)$

Correction:

$$\begin{aligned} [x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)]_{\mathcal{SI}, \zeta} &= f_{\vee}([x \doteq y]_{\mathcal{SI}, \zeta}, [\neg(x \doteq z)]_{\mathcal{SI}, \zeta}) \\ &= f_{\vee}([x \doteq y]_{\mathcal{SI}, \zeta}, f_{\neg}([x \doteq z]_{\mathcal{SI}, \zeta})) \end{aligned}$$

On a $[x]_{\mathcal{SI}, \zeta} = \zeta(x) = \text{Noir}$ et $[y]_{\mathcal{SI}, \zeta} = \zeta(y) = \text{Bleu}$, donc $[x \doteq y]_{\mathcal{SI}, \zeta} = F$.

On a $[x]_{\mathcal{SI}, \zeta} = \zeta(x) = \text{Noir}$ et $[z]_{\mathcal{SI}, \zeta} = \zeta(z) = \text{Rouge}$, donc $[x \doteq z]_{\mathcal{SI}, \zeta} = F$.

Donc :

$$\begin{aligned} [x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)]_{\mathcal{SI}, \zeta} &= f_{\vee}(F, f_{\neg}(F)) \\ &= T \end{aligned}$$

- $\text{suiv}(\text{suiv}(z)) \doteq j \wedge \text{suiv}(\text{suiv}(j)) \doteq y$

Correction: On a :

$$\begin{aligned}
[\text{souv}(\text{souv}(z))]_{\mathcal{SI}, \zeta} &= I(\text{souv})([\text{souv}(z)]_{\mathcal{SI}, \zeta}) \\
&= I(\text{souv})(I(\text{souv})([z]_{\mathcal{SI}, \zeta})) \\
&= I(\text{souv})(I(\text{souv})(\zeta(z))) \\
&= I(\text{souv})(I(\text{souv})(\text{Rouge})) \\
&= I(\text{souv})(\text{Orange}) \\
&= \text{Jaune} \\
[\text{j}]_{\mathcal{SI}, \zeta} &= I(\text{j}) \\
&= \text{Jaune}
\end{aligned}$$

Pour chacune des formules suivantes, dire si \mathcal{SI} en est un modèle :

- $\forall x \forall y \text{ suiv}(x) \doteq y \Leftrightarrow \text{prec}(y) \doteq x$
- $\forall x \text{ opposes}(x, \text{souv}(\text{souv}(\text{souv}(x))))$
- $\forall x \forall y \text{ suiv}(\text{souv}(x)) \doteq y \Rightarrow x \doteq \text{souv}(\text{souv}(\text{souv}(\text{souv}(y))))$
- $\forall x \exists y (\text{opposes}(x, y) \vee x \doteq y) \wedge \text{compose}(\text{prec}(y), \text{souv}(y), y)$