LIF11 Logique - Calcul des prédicats
Correction

Exercice 1:

On considère l'alphabet suivant :

- Symboles de fonction : $f/2$, $g/1$
- Constantes : a, b
- Symboles de prédicats : $p/1$, $q/2$

On considère les suites des symboles suivantes :

- $g(f(x, y)) \vee p(a)$
- $\exists x\ q(a, y) \wedge p(f(a, b)) \Rightarrow p(x)$
- $\forall x \exists y\ p(x) \wedge q(f(y, b))$
- $p(g(z)) \vee \forall x \exists z\ q(a, y)$
- $\exists x\ q(f(x, y), g(z))$
- $\forall y \forall x\ q(x, y)$

1. Quelles sont les suites de symboles qui ne sont pas des formules ?
   Correction:
   - $g(f(x, y)) \vee p(a)$ n'est pas une formule car g est un symbole de fonction et pas un symbole de prédicat.
   - $\forall x \exists y\ p(x) \wedge q(f(y, b))$ n'est pas une formule car l'arité de q est 2.

   Pour la suite, on pose :
   - $A = \exists x\ q(a, y) \wedge p(f(a, b)) \Rightarrow p(x)$
   - $B = p(g(z)) \vee \forall x \exists z\ q(a, y)$
   - $C = \exists x\ q(f(x, y), g(z))$
   - $D = \forall y \forall x\ q(x, y)$
2. Donner l'ensembles des variables libres et l'ensemble des variables liées de chaque formule.
   Correction:
   - $FV(A) = \{y\}$, $BV(A) = \{x\}$, $\forall A = \forall y\ A$ et $\exists A = \exists y\ A$
   - $FV(B) = \{y, z\}$, $BV(B) = \{x, z\}$, $\forall B = \forall y \forall z\ B$ et $\exists B = \exists y \exists z\ B$
   - $FV(C) = \{y, z\}$, $BV(C) = \{x\}$, $\forall C = \forall y \forall z\ C$ et $\exists C = \exists y \exists z\ C$
   - $FV(D) = \emptyset$, $BV(D) = \{x, y\}$, $\forall D = D$ et $\exists D = D$

Exercice 2:

On considère l'alphabet :

- Constantes : `titi`, `sylvestre`, `tom`, `jerry`, `spike`
- Symboles de prédicats : `souris`/1, `canari`/1, `chat`/1, `chien`/1, `chasse`/2.

Donner des formules exprimant chacune des propriétés ci-dessous (une proie est un individu qui est chassé par un autre, un prédateur est un individu qui en chasse un autre) :

- Titi a un prédateur.
  Correction: $\exists x\ \texttt{chasse}(x, \texttt{titi})$
- Les chats qui chassent les canaris ne chassent pas les souris.
  Correction: $\forall x\ (\texttt{chat}(x) \wedge (\exists y\ \texttt{chasse}(x, y) \wedge \texttt{canari}(y)) \Rightarrow \neg(\exists z\ \texttt{chasse}(x, z) \wedge \texttt{souris}(z)))$
- Spike est un prédateur d'un prédateur de Jerry.
  Correction: $\exists x\ \texttt{chasse}(\texttt{spike}, x) \wedge \texttt{chasse}(x, \texttt{titi})$
- x est une proie mais pas un prédateur.
  Correction: $\exists y\ \texttt{chasse}(y, x) \wedge \neg \exists z\ \texttt{chasse}(x, z)$

- x a un prédateur unique.
  Correction: $\exists y\ \texttt{chasse}(y, x) \wedge \forall z(\texttt{chasse}(z, x) \Rightarrow y \doteq z)$
- x n'est chassé par personne.
  Correction: $\forall y\ \neg\texttt{chasse}(y, x)$
- Tous les chasseurs sont des proies.
  Correction: $\forall x((\exists y\ \texttt{chasse}(x, y)) \Rightarrow (\exists z\ \texttt{chasse}(z, x)))$
- Tous les chats sont chasseurs et proies.
  Correction: $\forall x(\texttt{chat}(x) \Rightarrow \exists y \exists z\ \texttt{chasse}(y, x) \wedge \texttt{chasse}(x, z))$
- Sylvestre et Tom ne chassent pas les mêmes proies.
  Correction: $\forall x(\texttt{chasse}(\texttt{tom}, x) \Rightarrow \neg\texttt{chasse}(\texttt{sylvestre}, x))$

Exercice 3:

On considère l'alphabet :
- Constantes : `r`, `b`, `j`
- Symboles de fonction : `suiv`/1, `prec`/1
- Symboles de prédicat : `compose`/3, `opposes`/2

la structure d'interprétation $\mathcal{SI}$:
- Univers : $E = \{Jaune, Rouge, Orange, Bleu, Vert, Violet, Noir, Blanc\}$
- Interprétation :
  - $I(\texttt{r}) = Rouge$, $I(\texttt{b}) = Bleu$, $I(\texttt{j}) = Jaune$
  - $I(\texttt{suiv}) = Rouge \mapsto Orange, Orange \mapsto Jaune, Jaune \mapsto Vert, Vert \mapsto Bleu, Bleu \mapsto Violet, Violet \mapsto Rouge, Noir \mapsto Blanc, Blanc \mapsto Noir$
  - $I(\texttt{prec}) = Orange \mapsto Rouge, Jaune \mapsto Orange, Vert \mapsto Jaune, Bleu \mapsto Vert, Violet \mapsto Bleu, Rouge \mapsto Violet, Blanc \mapsto Noir, Noir \mapsto Blanc$
  - $I(\texttt{compose})$: $e_1, e_2, e_3 \mapsto V$ si le triplet (e_1, e_2, e_3) est dans l'ensemble suivant :$\{(Bleu, Jaune, Vert), (Jaune, Bleu, Vert), (Rouge, Bleu, Violet), (Bleu, Rouge, Violet), (Jaune, Rouge, Orange), (Rouge, Jaune, Orange)\}$
  - $I(\texttt{oppose})$: $e_1, e_2 \mapsto V$ si la paire (e_1, e_2) est dans l'ensemble $\{(Jaune, Violet), (Violet, Jaune), (Vert, Rouge), (Rouge, Vert), (Bleu, Orange), (Orange, Bleu), (Noir, Blanc), (Blanc, Noir)\}$

ainsi que l'affectation de valeurs au variables ζ suivante : $\zeta(x) = Noir$, $\zeta(y) = Bleu$, $\zeta(z) = Rouge$, $\zeta(u) = Violet$

Évaluer la valeur de vérité des formules suivantes par rapport à $\mathcal{SI}$ et ζ :
- $x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)$
  Correction:

$$\begin{aligned}[x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)]_{\mathcal{SI},\zeta} &= f_\vee([x \doteq y]_{\mathcal{SI},\zeta}, [\neg(x \doteq z)]_{\mathcal{SI},\zeta}) \\ &= f_\vee([x \doteq y]_{\mathcal{SI},\zeta}, f_\neg([(x \doteq z)]_{\mathcal{SI},\zeta}))\end{aligned}$$

  On a $[x]_{\mathcal{SI},\zeta} = \zeta(x) = Noir$ et $[y]_{\mathcal{SI},\zeta} = \zeta(y) = Bleu$, donc $[x \doteq y]_{\mathcal{SI},\zeta} = F$.
  On a $[x]_{\mathcal{SI},\zeta} = \zeta(x) = Noir$ et $[z]_{\mathcal{SI},\zeta} = \zeta(z) = Rouge$, donc $[x \doteq z]_{\mathcal{SI},\zeta} = F$.
  Donc :

$$\begin{aligned}[x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)]_{\mathcal{SI},\zeta} &= f_\vee(F, f_\neg(F)) \\ &= T\end{aligned}$$

- $\texttt{suiv}(\texttt{suiv}(z)) \doteq \texttt{j} \wedge \texttt{suiv}(\texttt{suiv}(\texttt{j})) \doteq y$

Correction: On a :

$$\begin{array}{rcl} [\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(z))]_{\mathcal{SI},\zeta} & = & I(\mathtt{suiv})([\mathtt{suiv}(z)]_{\mathcal{SI},\zeta}) \\ & = & I(\mathtt{suiv})(I(\mathtt{suiv})([z]_{\mathcal{SI},\zeta})) \\ & = & I(\mathtt{suiv})(I(\mathtt{suiv})(\zeta(z))) \\ & = & I(\mathtt{suiv})(I(\mathtt{suiv})(Rouge)) \\ & = & I(\mathtt{suiv})(Orange) \\ & = & Jaune \\ [\mathtt{j}]_{\mathcal{SI},\zeta} & = & I(\mathtt{j}) \\ & = & Jaune \end{array}$$

Pour chacune des formules suivantes, dire si $\mathcal{SI}$ en est un modèle :

- $\forall x \forall y\ \mathtt{suiv}(x) \doteq y \Leftrightarrow \mathtt{prec}(y) \doteq x$
- $\forall x\ \mathtt{opposes}(x, \mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(x))))$
- $\forall x \forall y\ \mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(x)) \doteq y \Rightarrow x \doteq \mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(y))))$
- $\forall x \exists y\ (\ \mathtt{opposes}(x, y) \vee x \doteq y\ ) \wedge \mathtt{compose}(\mathtt{prec}(y), \mathtt{suiv}(y), y)$