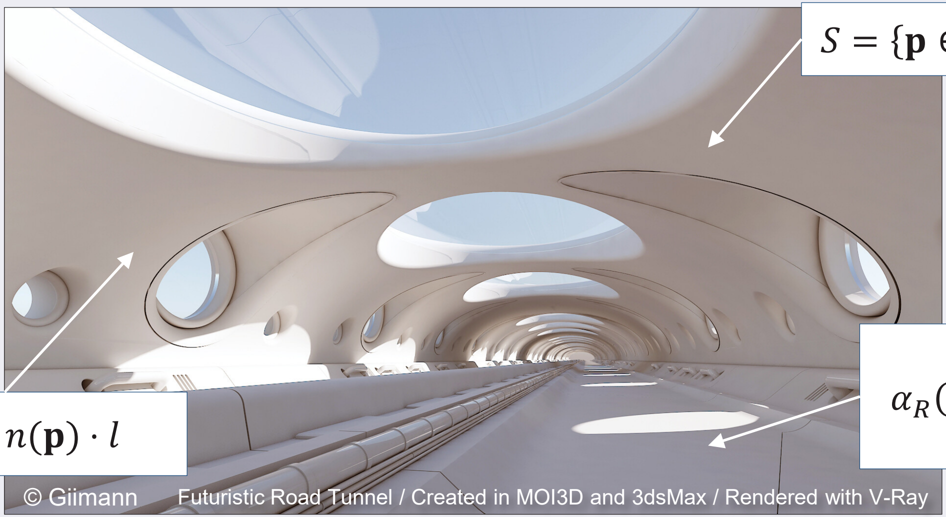
Computer Graphics

From mathematics …

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$



© Giimann Futuristic Road Tunnel / Created in MOI3D and 3dsMax / Rendered with V-Ray

$$d(\mathbf{p}) = n(\mathbf{p}) \cdot l$$

$$\alpha_R(\mathbf{p}) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \delta_i$$

… to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Mathematics
Modeling
Color and Texturing
Shading
Terrain Synthesis
Animation

Computer Graphics

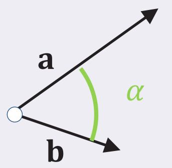
Vectors

Fondamentaux

Vecteur $\mathbf{a} = (x_a, y_a) \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a) \in \mathbf{R}^3$

Norme $|\mathbf{a}| = (x_a^2 + y_a^2 + z_a^2)^{1/2}$

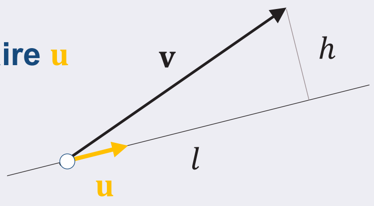
$$s = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$$



Produit scalaire

Définition $s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

Longueur projetée d'un vecteur $\mathbf{v}$ sur un axe Δ de direction **unitaire** $\mathbf{u}$



$$l = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$h = \sqrt{|\mathbf{v}|^2 - l^2}$$

Produit scalaire signé

Produit vectoriel

Scalaire dans le plan, vecteur dans l'espace

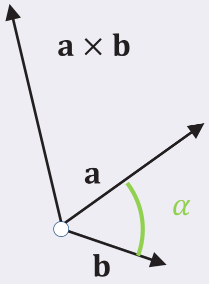
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = x_a y_b - y_a x_b \in \mathbf{R}$$

Dans le plan $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ -(x_a z_b - z_a x_b) \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

Dans l'espace $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ orthogonal à $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$



P. Shirley and S. Marschner. Fundamentals of Computer Graphics. Third Edition. *A.K. Peters*, 2009.

LIRIS CNRS Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr

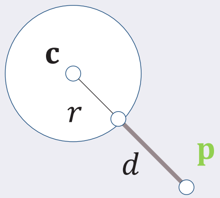
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Distances

Distance entre deux points $d = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$

Distance entre un point et une sphère

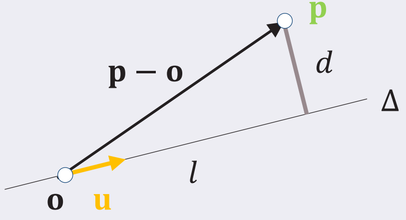
$$\boxed{d(\mathbf{p}, S) = |\mathbf{p} - \mathbf{c}| - r}$$



Distance d'un point à une droite

Soit $\mathbf{o}$ un point de Δ de direction **unitaire** $\mathbf{u}$

$$\boxed{l = (\mathbf{p} - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{u}} \qquad \boxed{d(\mathbf{p}, \Delta) = \sqrt{|\mathbf{p} - \mathbf{o}|^2 - l^2}}$$



Distance d'un point à un plan

Soit $\mathbf{o}$ un point du plan Π de normale $\mathbf{n}$

$$\boxed{d(\mathbf{p}, \Pi) = |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{o})|}$$

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr

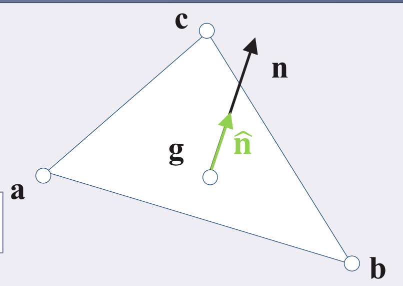
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Triangles

Caractérisation

Sommets $\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}$
Normale $\hat{\mathbf{n}}$ unitaire (sens de parcours) et aire s



$\mathbf{n} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})$
On définit $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/||\mathbf{n}||$

$s = 1/2\,|\mathbf{n}| = 1/2\,|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})|$

Norme du produit vectoriel

Coordonnées	$\mathbf{p}(x, y, z)$
Norme	$\|\|\mathbf{p}\|\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$
Vecteur unitaire	$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/\|\|\mathbf{p}\|\|$

Coordonnés barycentriques

Le barycentre de $(\mathbf{a}, \alpha)$ et $(\mathbf{b}, \beta)$ est l'unique point $\mathbf{q}$ tel que $\alpha\ \mathbf{qa} + \beta\ \mathbf{qb} = \mathbf{0}$

Coordonnées $\mathbf{q} = (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})/(\alpha + \beta)$

Le milieu de $\mathbf{ab}$ est l'isobarycentre $\mathbf{m} = 1/2\ \mathbf{a} + 1/2\ \mathbf{b}$
Lorsque $\alpha = t$ et $\beta = 1 - t$, $t \in [0,1]$ on retrouve l'interpolation

$\mathbf{q}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$

Généralisation à n points
Centre de gravité d'un triangle $\mathbf{g} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/3$

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Functions

Interpolation

Interpolation linéaire

Sur $[0,1]$ on veut f telle que $f(0)=a$ et $f(1)=b$

$$f(x)=(1-x)a+xb$$

$$f(x)=\frac{x_b-x}{x_b-x_a}y_b+\frac{x-x_a}{x_b-x_a}y_a$$

Cas général : $f(x_a)=y_a$ et $f(x_b)=y_b$

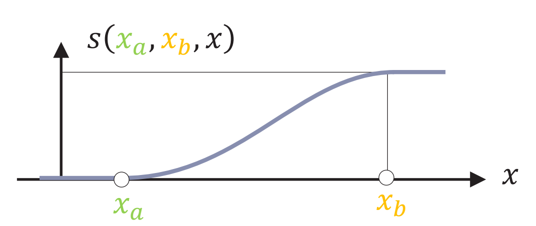
Interpolation de degré supérieur

On cherche $f\in\mathbf{R}_n[x]$ avec $f(x_a)=y_a$ et $f(x_b)=y_b$ et $f^{(k)}(x_a)=y_a^k$ et $f^{(k)}(x_b)=y_b^k$

$2n$ contraintes, polynôme de degré $2n-1$

Sur $[0,1]$,on veut f telle que $f(0)=a$ et $f(1)=b$ et $f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0$

Cubique	$f(x)=x^2(3-2x)$
Quintique	$f(x)=x^3(6x^2-15x+10)$



Fonction **smoothstep**

Cubique

$$s(x_a,x_b,x)=f\circ c\circ v(x,x_a,x_b)$$

Restriction
$c(x)=\max(0,\min(x,1))$

Changement de variable

$$v(x)=\frac{x_b-x}{x_b-x_a}$$

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

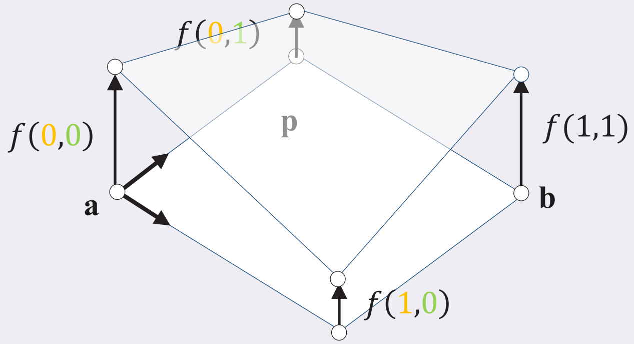
Interpolation bi linéaire

Equation $f(u,v)$ où $(u,v) \in [0,1]^2$ et 4 contraintes aux sommet du domaine

$$f(u,v) = (1-u)(1-v)\, f(0,0) + (1-u)v\, f(0,1) + u(1-v)\, f(1,0) + u\, f(1,1)$$

Paramétrage général sur $(u,v) \in [u_\mathbf{a}, u_\mathbf{b}] \times [v_\mathbf{a}, v_\mathbf{b}]$

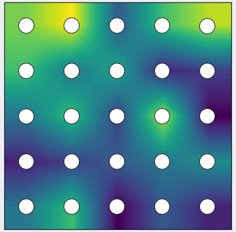
Changement de variable

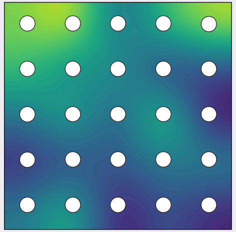


Interpolation de degré supérieur

Plus complexe : 16 contraintes pour une bi cubique

Valeurs $f(u,v)$, dérivées $\partial f/\partial u$ et $\partial f/\partial v$
et dérivées secondes $\partial^2 f/\partial u\,\partial v$


Linéaire


Cubique

Master

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Matrixes

Matrices de réels

Tableau de réels de l lignes par c colonnes

Colonnes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0c-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l-10} & \cdots & a_{l-1c-1} \end{pmatrix}$$

Lignes

Opérations

Somme, produit de matrice

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

$\mathbf{A}\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,\mathbf{A}$

Ordre des transformations important

Matrice identité, inverse

$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{A}^{-1}$ si elle existe est telle que $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

Inverse d'un produit $(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Transposée $\mathbf{A}^{t}$ définie par $a_{ij}^{t} = a_{ji}$

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Matrices de transformation

Homothéties

Homothétie de vecteur $\mathbf{s}$

$$\mathbf{S}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{s}_z \end{pmatrix}$$

Rotations d'angle θ

Rotation d'angle θ autour des axes principaux

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle θ autour de l'axe $\mathbf{u}$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x^2\,\bar{c} + c & \mathbf{u}_x\mathbf{u}_y\,\bar{c} - s\,\mathbf{u}_z & \mathbf{u}_x\mathbf{u}_z\,\bar{c} + s\,\mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_x\mathbf{u}_y\,\bar{c} + s\,\mathbf{u}_z & \mathbf{u}_y^2\,\bar{c} + c & \mathbf{u}_y\mathbf{u}_z\,\bar{c} - s\,\mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_x\mathbf{u}_z\,\bar{c} - s\,\mathbf{u}_y & \mathbf{u}_y\mathbf{u}_z\,\bar{c} + s\,\mathbf{u}_x & \mathbf{u}_z^2\,\bar{c} + c \end{pmatrix}$$

$s = \sin\theta$

$c = \cos\theta$

$\bar{c} = 1 - \cos\theta$

Transformations

Application

Les **positions** résultant d'une transformation sont définies par produit matrice vecteur

Cas des **normales**

Point

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{A}\,\mathbf{p}$$

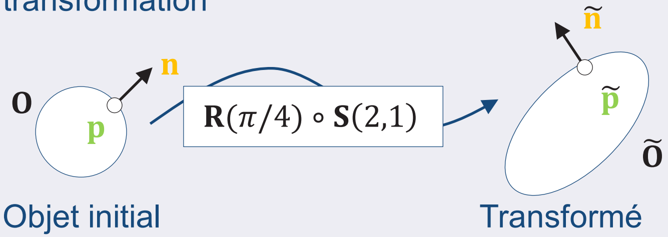
Nouveau point Matrice de transformation

Inverse Transposée

Devra être normalisé

$$\tilde{\mathbf{n}} = (\mathbf{A}^{-1})^{t}\,\mathbf{n}$$

Appendix



Compositions

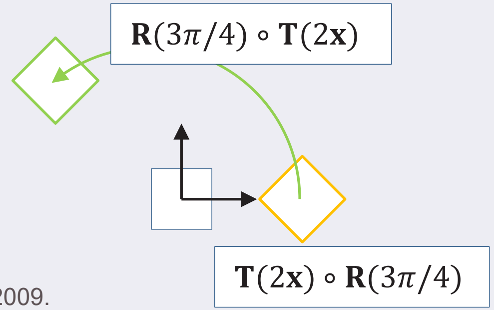
Les transformations sont effectuées dans le repère **canonique**

Rotation autour de l'axe Δ en un point d'ancrage **a**

$$\mathbf{R}_{\mathbf{a},z}(\theta) = \mathbf{T}_{\mathbf{a}} \circ \mathbf{R}_{\Delta}(\theta) \circ \mathbf{T}_{-\mathbf{a}}$$

L'**ordre** des transformations est important

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,\mathbf{A}$$



P. Shirley and S. Marschner. Fundamentals of Computer Graphics. Third Edition. *A.K. Peters*, 2009.

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

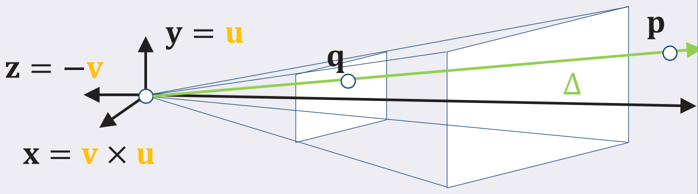
Projection

Camera rays

Objectifs

Projeter un point $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$ de l'espace sur l'écran en un pixel $\mathbf{q} \in [0, w-1] \times [0, h-1] \subset \mathbf{N}^2$
Définir l'équation d'un rayon Δ à partir d'un pixel $\mathbf{q}$

Caractérisation



Position $\mathbf{e}$, vecteur de vue $\mathbf{v}$, vecteur haut $\mathbf{u}$
Angle d'ouverture horizontal α, demi angle $\beta = \alpha/2$
Aspect ratio $r = w/h$
Demi hauteur $\tilde{h} = h/2$ et longueur $\tilde{w} = w/2$

Rayon $\Delta(\mathbf{e}, \mathbf{d})$ depuis un pixel $\mathbf{q}$

$$\mathbf{d} = \tan\beta \frac{(\mathbf{q}_x - \tilde{w})}{\tilde{w}} \mathbf{x} + \frac{1}{r} \tan\beta \frac{(\tilde{h} - \mathbf{q}_y)}{\tilde{h}} \mathbf{y} + \mathbf{v}$$

Coordonnées unitaires dans l'écran

Repère local
$\mathbf{x} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$
$\mathbf{y} = \mathbf{u}$
$\mathbf{z} = -\mathbf{v}$

Projection d'un point $\mathbf{p}$ sur un pixel $\mathbf{q}$

$$\tilde{\mathbf{q}} = \left(\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{e}) \cdot \mathbf{x}}{d \tan\beta}, \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{e}) \cdot \mathbf{u}}{d\, r \tan\beta} \right)$$

$$\mathbf{q} = (\tilde{w} + \tilde{w}\, \mathbf{q}_x, \tilde{h} - \tilde{h}\, \mathbf{q}_y)$$

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Frames

Repères orthonormés

Construction

Construction d'un repère local orthonormé $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$ à partir d'une direction $\mathbf{n}$

Algorithme simple [Hughes1999] ou optimisé [Frisvad2012]

Si $|\mathbf{n}_x| > |\mathbf{n}_z|$
  $\mathbf{v} = (-\mathbf{n}_y, \mathbf{n}_x, 0)$
Sinon
  $\mathbf{v} = (0, -\mathbf{n}_z, \mathbf{n}_y)$
$\mathbf{v} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$
$\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{n}$

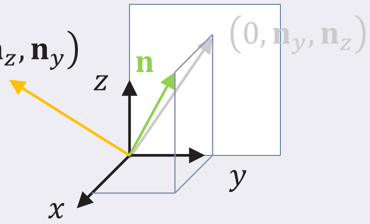
$6\times, 3+$

$1\sqrt{}, 3/, 3\times, 2+$

Si $\mathbf{n}_z > 1 - \varepsilon$
  $\mathbf{u} = \mathbf{x}$ et $\mathbf{u} = \mathbf{y}$
Sinon si $\mathbf{n}_z < \varepsilon - 1$
  $\mathbf{u} = -\boldsymbol{y}$ et $\mathbf{u} = -\mathbf{x}$
Sinon
  $a = 1/(1 + \mathbf{n}_z)$
  $b = -u\, \mathbf{n}_x\, \mathbf{n}_y$
  $\mathbf{u} = (1 - a\, \mathbf{n}_x^2, b, -\mathbf{n}_x)$
  $\mathbf{v} = (b, 1 - a\, \mathbf{n}_y^2, -\mathbf{n}_y)$

$1/, 6\times, 5+$

$\mathbf{v} = (0, -\mathbf{n}_z, \mathbf{n}_y)$



J. F. Hughes and T. Möller. Building an Orthonormal Basis from a Unit Vector. *Journal of Graphics Tools*, **4**(4), 33–35, 1999,
J. R. Frisvad. Building an Orthonormal Basis from a 3D Unit Vector Without Normalization. *Journal of Graphics Tools*, **16**(3), 151–159, 2012.

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Random Samples

Discs

Random points inside

Rejection algorithm : compute (x, y) uniformly in $[-r, r]^2$ while $x^2 + y^2 < r^2$
Trigonometry : compute $\rho \in [0,1]$ and $\theta \in [0,2\pi]$, we have:

$$\boxed{\mathbf{p} = r\sqrt{\rho}(\cos\theta\,, \sin\theta\,)}$$

Vogel disc sampling

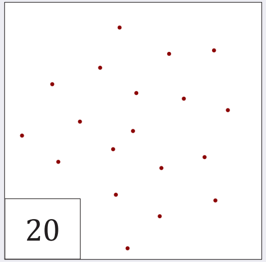
Spiral distribution of points $\mathbf{p}_k, k \in [0, n-1]$
Procedural and deterministic way to sample a disc

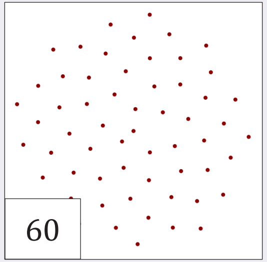
$$\boxed{\mathbf{p}_k = r\sqrt{\rho_k}(\cos\theta_k\,, \sin\theta_k\,)}$$

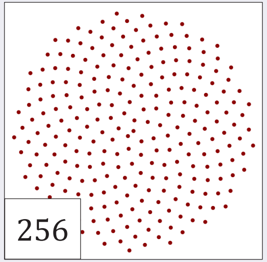
Golden angle

$$\boxed{\rho_k = (k + 1/2)/n}$$

$$\boxed{\theta_k \approx \gamma\, k, \text{ with } \gamma = \pi\left(3 - \sqrt{5}\right) \approx 2{,}4}$$







H. Vogel. A better way to construct the sunflower head. *Mathematical Biosciences*. **44** (44), 179-189, 1979

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Sphere

Random points inside

Rejection algorithm : compute (x, y) uniformly in $[-r, r]^3$ while $x^2 + y^2 + z^2 < r^2$
Trigonometry : compute $\rho \in [0,1]$ and $(u, v) \in [0,1]^2$, then set:

$$\mathbf{p} = r\sqrt[3]{\rho}(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$$

$$\theta = 2\pi\, u \in [0,2\pi] \qquad \varphi = \cos^{-1}(2v - 1) \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Fibonacci surface sampling

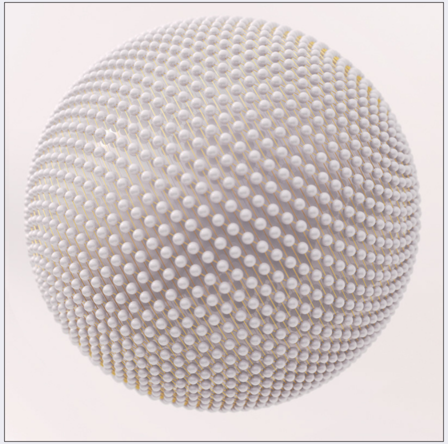
Spiral distribution of points $\mathbf{p}_k, k \in [0, n-1]$
Procedural and deterministic way to sample a sphere

$$\varphi_k \approx \cos^{-1}(1 - 2k/n)$$

$$\mathbf{p}_k = r\sqrt{\rho_k}(\cos\theta_k\sin\varphi_k, \sin\theta_k\sin\varphi_k, \cos\varphi_k)$$

$$\rho_k = (k + 1/2)/n \qquad \theta_k \approx (k + 1/2)\pi\left(1 + \sqrt{5}\right)$$

Simplified equations avoid unnecessary trigonometric operations



Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Random points inside

Rejection algorithm

Sample point inside S, compute $s = (\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n}$, if $s < 0$ set $\mathbf{p} = \mathbf{p} + 2s\,\mathbf{n}$

Fibonacci sampling

Change angle $\varphi_k \approx \cos^{-1}(k/n)$ in the spherical distribution to cover the hemisphere only

Simplify equation (avoid unnecessary $\cos$ and $\sin$)

$$\mathbf{p}_k = r\sqrt{\rho_k}\left(\cos\theta_k\sqrt{1-z^2}, \sin\theta_k\sqrt{1-z^2}, z\right)$$

$$z \approx k/n$$

$$\rho_k = (k+1/2)/n$$

$$\theta_k \approx (k+1/2)\pi\left(1+\sqrt{5}\right)$$

Computer Graphics

Appendix

Transformations des normales

Comatrice

Les cofacteurs d'indices ij sont définis par

$$(com\ \mathbf{A})_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$$

Sous matrice de taille $n-1$ sans la ligne i ni la colonne j de $\mathbf{A}$

Propriété avec l'inverse

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (com\ \mathbf{A})^t$$

Normales

Dans $\mathbf{R}$^3, la comatrice $com\ \mathbf{A}$ décrit l'interaction de $\mathbf{A}$ avec le produit vectoriel

Demonstration

$$\mathbf{A\,u} \times \mathbf{A\,v} = (com\ \mathbf{A})\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

Donc $\forall\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, en posant $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, on en déduit pour une transformation affine $\mathbf{A}$

$$\tilde{\mathbf{n}} = (com\ \mathbf{A})\ \mathbf{n} = \det \mathbf{A}\ (\mathbf{A}^{-1})^t\ \mathbf{n}$$

$$\tilde{\mathbf{n}} = (\mathbf{A}^{-1})^t\ \mathbf{n}$$

En effet, $\forall x$: $(\det \mathbf{A})\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot x = (\det \mathbf{A})|\mathbf{u}, \mathbf{v}, x| = |\mathbf{Au}, \mathbf{Av}, \mathbf{A}x| = \mathbf{Au} \times \mathbf{Av} \cdot \mathbf{A}x = \mathbf{A}^t(\mathbf{Au} \times \mathbf{Av}) \cdot x$
Donc $\mathbf{A}^t(\mathbf{Au} \times \mathbf{Av}) = (\det \mathbf{A})\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{A}^t(com\ \mathbf{A})\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

LIRIS CNRS Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin