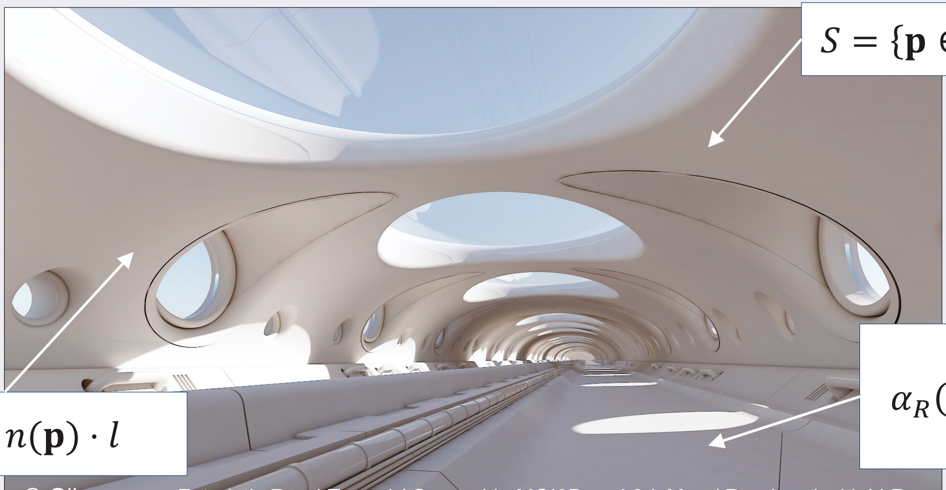
Computer Graphics

From mathematics …

$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$



© Giimann Futuristic Road Tunnel / Created in MOI3D and 3dsMax / Rendered with V-Ray

$d(\mathbf{p}) = n(\mathbf{p}) \cdot l$

$\alpha_R(\mathbf{p}) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \delta_i$

… to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Mathematics

Modeling

Color and Texturing

Shading

Realistic Rendering

Acceleration

Introduction

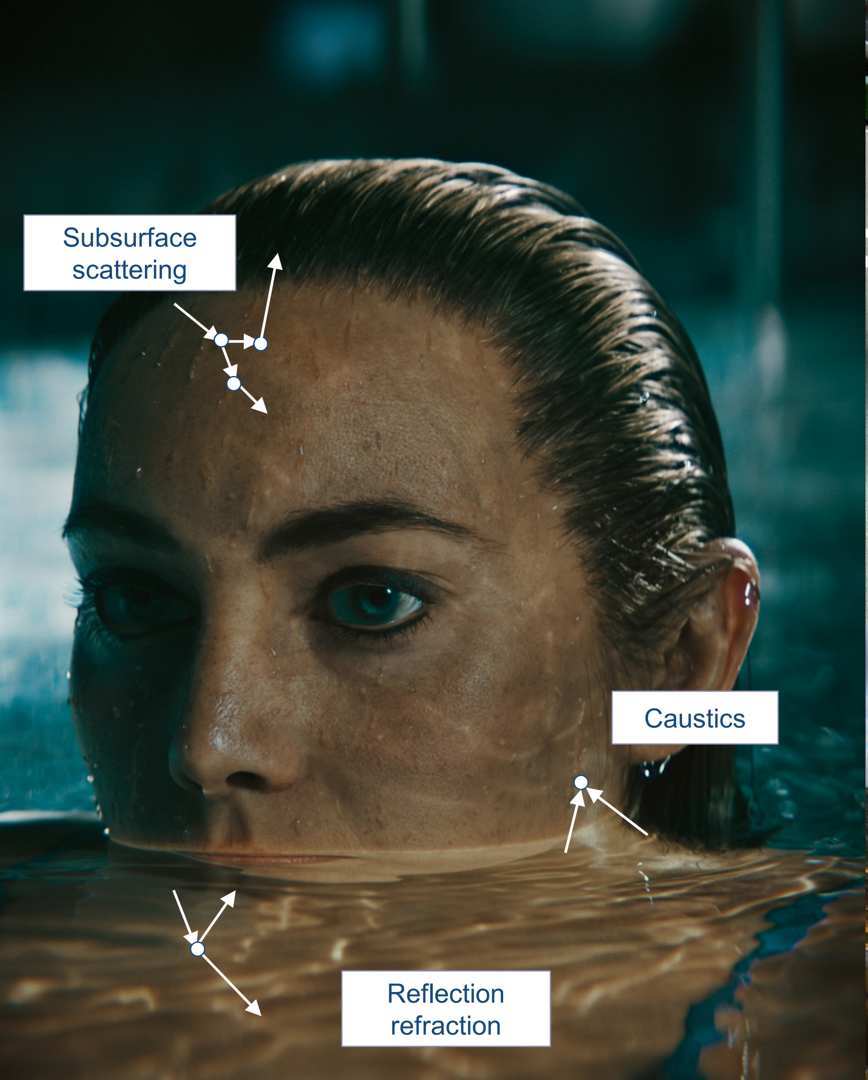
Rendu
Simulation de l'éclairement

Rendu réaliste
Simulation des phénomènes physiques complexes, interactions lumière-matière, équations globales

Shading temps réel
Simplification extrêmes, approches phénoménologiques, équations locales, émulation des effets manquants

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Global illumination


Subsurface scattering
Caustics
Reflection refraction


Halo in transparent coating


Scattering
Global illumination

L'équation de rendu

Synthèse

Master

Equation intégrale de Fredholm de second type [Kajiya 1986]
Définition récursive de $L(\mathbf{p},\theta)$

Emission dans la direction θ

Somme dans toutes les directions

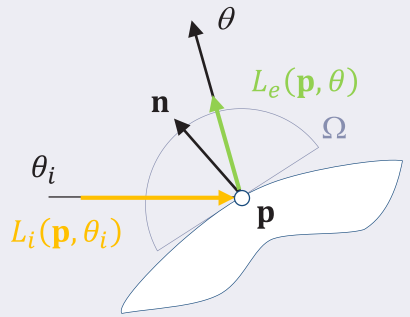
Lumière arrivant en $\mathbf{p}$ de la direction θ_i

$$L(\mathbf{p},\theta) = L_e(\mathbf{p},\theta) + \int_\Omega f(\theta_i,\theta) L_i(\mathbf{p},\theta_i) \cos\theta_i \, d\theta_i$$

Lumière quittant $\mathbf{p}$ dans la direction θ

Position $\mathbf{p}$ sur l'objet

Bidirectional **R**eflectance **D**istribution **F**unction at $\mathbf{p}$



eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

J. Kajiya. The rendering equation, 143–150, **20**(4), Proceeedings of SIGGRAPH, 1986

L'équation de rendu

Analyse

Résolution complexe et coûteuse
Echantillonnage **stochastique** (Monte Carlo) des chemin lumineux

Shader

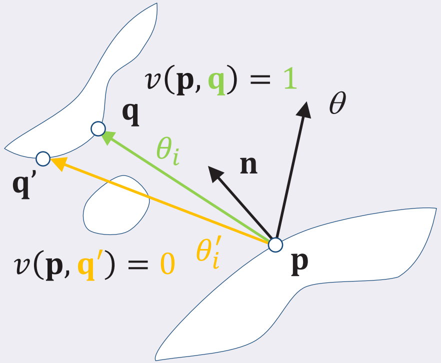
Définition **récursive**

Lumière en $\mathbf{p}$

Visibilité entre $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$

$$L(\mathbf{p},\theta) = L_e(\mathbf{p},\theta) + \int_{\mathbf{q}} f(\mathbf{p},\theta_i,\theta)\, L(\mathbf{q},\theta_i')\, v(\mathbf{p},\mathbf{q}) \cos\theta_i \, d\theta_i$$

Autres points $\mathbf{q}$ de la scène



Approximation de l'intégrale par une somme

Calcul d'**intersection** entre un rayon Δ et un objet O

Stratégies d'échantillonnage
Contrôle de l'erreur

J. Kajiya. The rendering equation, 143–150, **20**(4), Proceeedings of SIGGRAPH, 1986

Université Claude Bernard Lyon 1

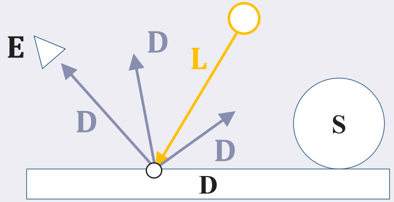
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Analyse

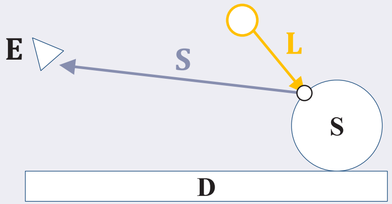
Trajectoires de lumière

Principe du retour inverse de la lumière

Eclairement direct : chemin lumineux L [D | S]E



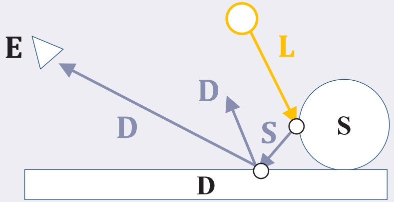
Chemin LDE



Chemin LSE

Complexe, n niveaux

Eclairement indirect : chemin lumineux L[S | D]*E

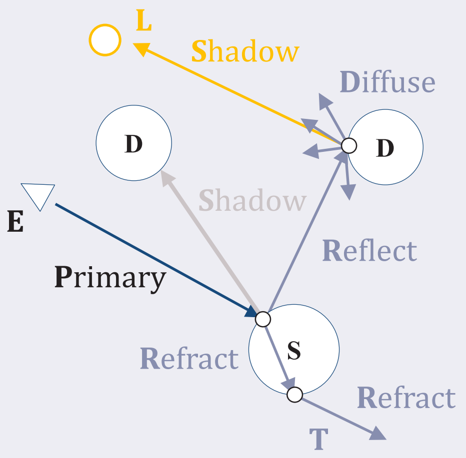


Chemin LSDE

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Détection

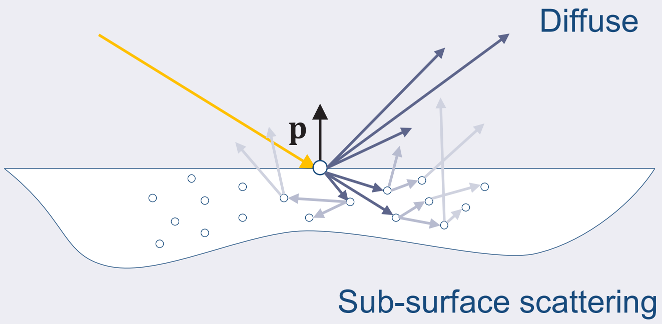
Détection d'un chemin lumineux à chaque étape de L[S | D]*E ?



LIRIS
CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Cas général

Matériaux transparents, **dispersifs**



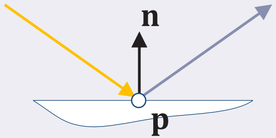
LIRIS CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

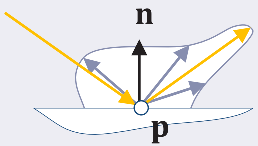
Local Illumination

Cas particuliers

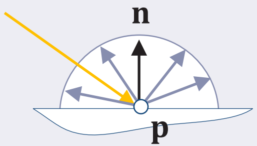
Surface non transparente, plus ou moins réfléchissante



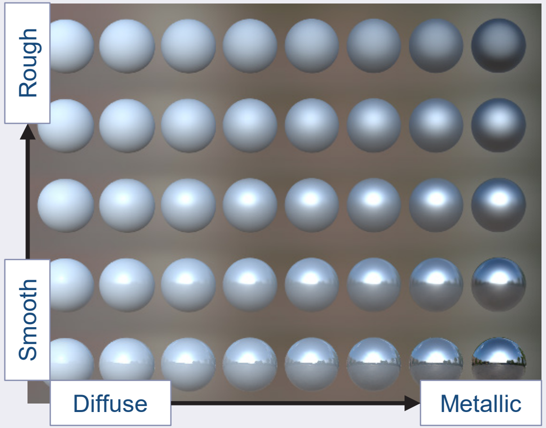
Miroir parfait



Combinaison (spéculaire et diffuse)



Surface diffuse (parfaite)



LIRIS CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Modèle local simplifié

Modèle ambiant diffuse spéculaire

Approximation de la couleur c de la surface comme somme de trois composantes

$$c = c_a + c_d + c_s$$

Ambiant — Diffus — Spéculaire

Ambiant
$$c_a = m_a \otimes l_a$$

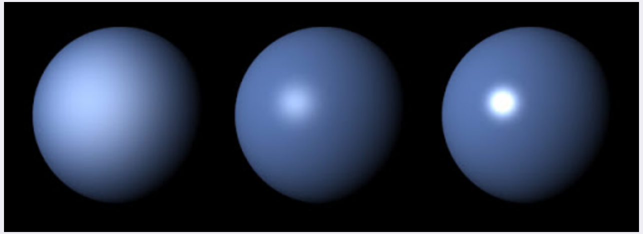
Approximation grossière des multiples réflexions

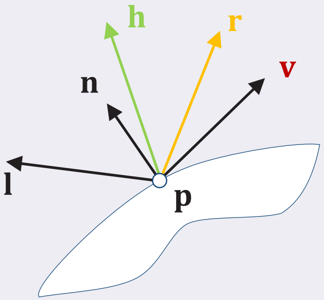
Diffus
$$c_d = m_d \otimes l_d \max(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}, 0)$$

Indépendant de $\mathbf{v}$: une surface diffuse idéale reflète la lumière également dans toutes les directions (loi de Lambert)

Spéculaire Phong
$$c_d = m_s \otimes l_s \max(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}, 0)^n$$

Direction réfléchie
$$\mathbf{r} = 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l})\,\mathbf{n} - \mathbf{l}$$





Spéculaire Blinn–Phong
$$c_d = m_s \otimes l_s \max(\mathbf{h} \cdot \mathbf{v}, 0)^n$$

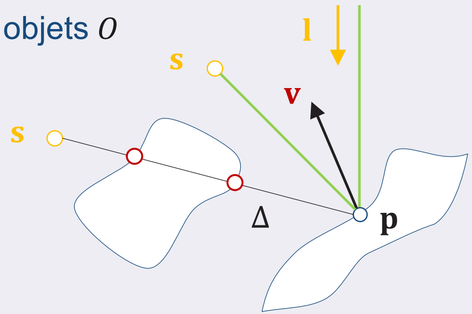
Demi direction réfléchie
$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{l} + \mathbf{v}}{\|\mathbf{l} + \mathbf{v}\|}$$

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Ombres

Principe

Occlusion (partielle ou complète) de la source lumineuse $\mathbf{s}$ par des objets O
Indépendantes de l'observateur donc de $\mathbf{v}$



Sources

- Surfaciques ou volumiques
  - Master
- Ponctuelles ou directionnelles
  - Isotropes
  - Infinies

Visibilité

Test d'intersection entre un rayon entre $\mathbf{p}$ et la source et les objets O de la scène

Ponctuelle isotrope
$v(\mathbf{p},\mathbf{s}) = \delta_{[\mathbf{p},\mathbf{s}]\cap O}$

Segment $[\mathbf{p},\mathbf{s}]$ Objets

Directionnelle infinie
$v(\mathbf{p},\mathbf{s}_\infty) = \delta_{\Delta\cap O}$

Rayon de $\mathbf{p}$
de direction $-\mathbf{l}$

Remarque

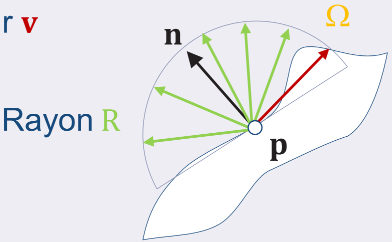
Les ombres, l'éclairage diffus sont indépendants de $\mathbf{v}$
L'éclairage est constant si $\mathbf{s}$ et O constants

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Occlusion ambiante

Principe

Approximation locale de l'accessibilité
Indépendante de la position des sources lumineuses $\mathbf{s}$ et de l'observateur $\mathbf{v}$



$$\alpha(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi}\int_{\Omega} v(\mathbf{p},\omega)\,\mathbf{n}\cdot\omega\,d\omega$$

Accessibilité Hémisphère Visibilité Angle solide

$$\alpha_R(\mathbf{p}) \approx \frac{1}{n}\sum_{\omega_i} v_R(\mathbf{p},\omega)\,\mathbf{n}\cdot\omega_i$$

Nombre d'échantillons Visibilité locale

Visibilité

Test d'intersection entre un rayon et l'objet

$$v_R(\mathbf{p},\omega) = \delta_{[\mathbf{p},\mathbf{p}+R\omega]\cap O}$$

Segment de longueur R

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Light and shadow baking

Principe

Les ombres et l'éclairage diffus E sont indépendants de $\mathbf{v}$

E constant si $\mathbf{s}$ et O constants

Prétraitement des points $\mathbf{p}_O$ de O : calculer $E(\mathbf{p}_O)$ et stocker le résultat dans une T_E associée

Coût de stockage de T_E

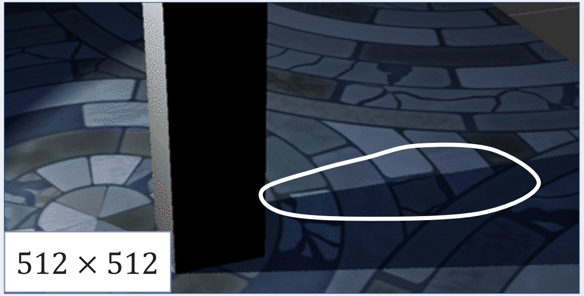
Rendu **accéléré** par la requête des valeurs dans T_E

Effets lumineux **complexes**

Limites

Des objets O de même texture de matériau instanciés à des endroits différents ont souvent des cartes d'éclairement T_E différentes

32×32



512×512

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin


Light
map


Ambient occlusion
© Stef Velzeboer Environment Artist


Ambient occlusion
Foliage shadow
© Stef Velzeboer Environment Artist

Reflection and refraction

Réflexion

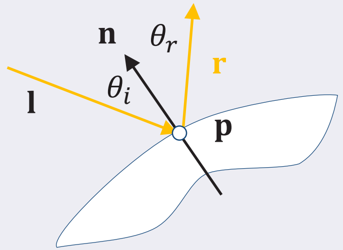
Principe

Miroir parfait

Direction de réflexion
$\mathbf{r} = \mathbf{l} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l})\mathbf{n}$

$\theta_i = \theta_r$

Incident Réfléchi



Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Réfraction

Principe

Loi de Snell

Ratio des indices de réfraction

$$\eta = \eta_i / \eta_t$$

Transmission

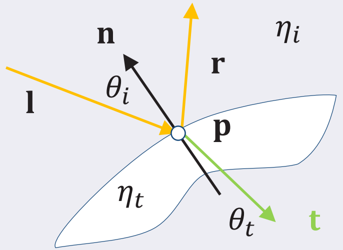
$$\kappa = 1 - \eta^2 (1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{l})^2)$$

Réfraction seulement si $\kappa > 0$

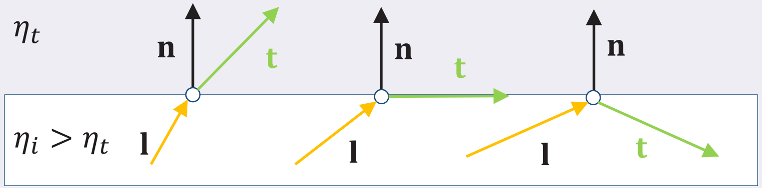
$$\mathbf{t} = \eta \, \mathbf{l} - (\eta \, \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} + \sqrt{\kappa}) \, \mathbf{n}$$

$$\eta_i \sin \theta_i = \eta_t \sin \theta_t$$

Incident Transmis



Réflexion totale interne si $\eta_i > \eta_t$ (donc si $\eta > 1$)
Dans ce cas, si $\theta_i > \theta_c$ alors réflexion



Absorption

Loi de Beer-Lambert pour un milieu transparent absorbant

Coefficient d'absorption

$$i = i_0 e^{-k\, d}$$

Distance

Fresnel

Quantité de lumière transmise ou réfléchie dépend de θ_i

Master

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Réfraction

Fresnel

Master

Quantité de lumière transmise ou réfléchie dépend de θ_i
Décomposition de la lumière en ondes parallèle et polarisée

$$F_R^{\perp} = \left(\frac{\eta_i \cos\theta_i - \eta_t cost\theta_t}{\eta_i \cos\theta_i + \eta_t cost\theta_t}\right)^2$$

$$F_R^{||} = \left(\frac{\eta_i \cos\theta_t - \eta_t cost\theta_i}{\eta_i \cos\theta_t + \eta_t cost\theta_i}\right)^2$$

$$F_R = (F_R^{||} + F_T^{\perp})/2$$

LIRIS CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Intersections

Sphère

Recherche de $\Delta \cap S$
Résolution de l'équation du second degré

$$\mathbf{d}^2 t^2 + 2(\mathbf{o}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{d}\,t + (\mathbf{o}-\mathbf{c})^2 - r^2 = 0$$

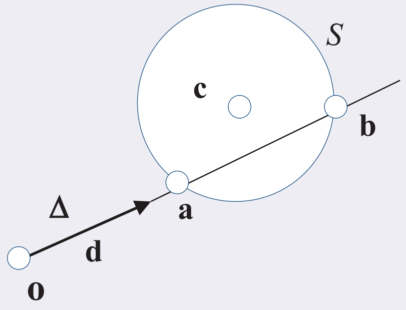
Méthode géométrique plus efficace
Calcul de $\mathrm{d}(\mathbf{p}(t),\Delta)^2$ et comparaison à r^2
Optimisations : rayon de direction unitaire $|\mathbf{d}| = 1$

Equation implicite de S

$$(\mathbf{p}-\mathbf{c})^2 = r^2$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + \mathbf{d}t$$

Equation paramétrique de Δ

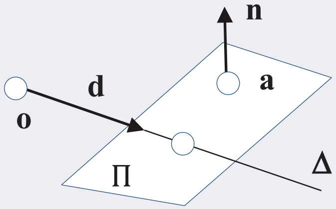


eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Plan

Recherche de $\Delta \cap \Pi$
Résolution de l'équation linéaire

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}\, t + (\mathbf{o} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0$$



Equation implicite de Π

$$(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + \mathbf{d}t$$

Boîte

Intersection avec les plans Π_{yz}, Π_{xz} et Π_{xy} parallèles aux axes

Abscisse $t \in \mathbf{R}$

Intersection ray $\Delta : \mathbf{o} + \mathbf{d}t$ and $B(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
Compute $\mathbf{u} = (\mathbf{a} - \mathbf{o})/\mathbf{d}$ and $\mathbf{v} = (\mathbf{b} - \mathbf{o})/\mathbf{d}$
Compute $\mathbf{t}^- = \min(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ and $\mathbf{t}^+ = \max(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
$\mathrm{t}_{in} = \max(\mathbf{t}_x^-, \mathbf{t}_y^-, \mathbf{t}_z^-)$ and $\mathrm{t}_{out} = \min(\mathbf{t}_x^+, \mathbf{t}_y^+, \mathbf{t}_z^+)$
If $\mathrm{t}_{in} < t_{out}$ and $\mathrm{t}_{in} > 0$ return true
return false

Division membre à membre et factorisation $\mathbf{n} = \pm\mathbf{x}$ ou $\pm\mathbf{y}$ ou $\pm\mathbf{z}$

LIRIS CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Primitives géométriques

Cylindre infini

Cylindre C_∞ caractérisé par une droite D et le rayon r

$$d^2(\mathbf{p},D)=(\mathbf{p}-\mathbf{a})^2-\left((\mathbf{p}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{u}\right)^2$$

Point de D — Vecteur directeur de D

Equation implicite de C_∞

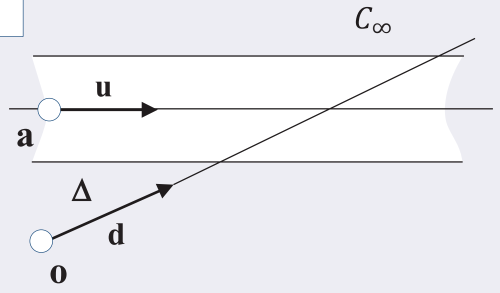
$$d(\mathbf{p},D)^2=r^2$$

$$\mathbf{p}(t)=\mathbf{o}+\mathbf{d}t$$

Equation paramétrique de Δ

$$(\mathbf{d}^2-(\mathbf{d}\cdot\mathbf{u})^2)\ t^2+2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\ -\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{d}\cdot\mathbf{u})t+\mathbf{b}^2-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})^2\ -r^2=0$$

On définit $\mathbf{b}=\mathbf{o}-\mathbf{a}$



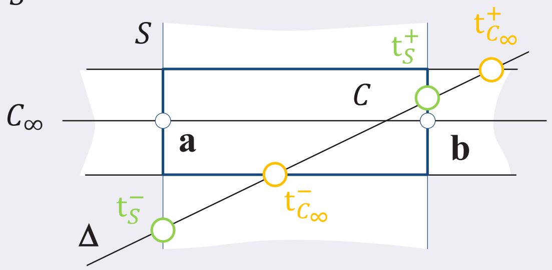
Cylindre

Cylindre $C=C_\infty\cap S$ intersection entre un cylindre C_∞ et un slab S
Calcul de l'intervalle d'intersection $[\mathrm{t}^-,\mathrm{t}^+]$

$$[\mathrm{t}^-,\mathrm{t}^+]=(C_\infty\cap\Delta)\cap(S\cap\Delta)$$

Cylindre — Slab

$$[\mathrm{t}^-,\mathrm{t}^+]=\left[\max\left(\mathrm{t}_S^-,\mathrm{t}_{C_\infty}^-\right),\min\left(\mathrm{t}_S^+,\mathrm{t}_{C_\infty}^+\right)\right]$$



Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Primitives géométriques

Tore

Tore défini par un centre, un axe, et deux rayons

On note $c^2 = (\mathbf{p}-\mathbf{c})^2$, $h^2 = \left((\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{u}\right)$ et $l^2 = c^2 - h^2$

Equation implicite de T

$$\boxed{(l-R)^2 + h^2 = r^2}$$

Résolution d'une quartique

$$\boxed{(r^2 - h^2 - l^2 - R^2)^2 - 4R^2 l^2 = 0}$$

Surfaces implicites

Pas de méthode analytique générale

Sphere Tracing [Hart1996]

Sphere Tracing [Hart1996]

Start from ray origin $\mathbf{p} = \mathbf{o}$

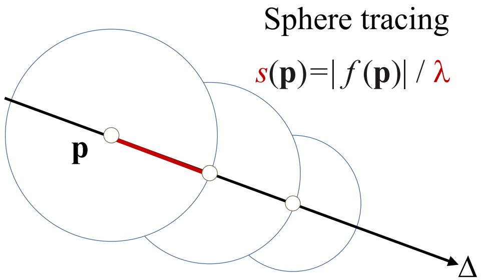
At every step i

If $f(\mathbf{p}_i) < 0$ then

Intersection found

Otherwise step forward

$s(\mathbf{p}_i) = |f(\mathbf{p}_i)|/\lambda$



Master

J. Hart. Sphere Tracing: A Geometric Method for the Antialiased Ray Tracing of Implicit Surfaces. *The Visual Computer* **12**(10), 527–545,1996.

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Supplementary material

Radiosité

Méthode

- Cas des surfaces diffuses
- Calcul des facteurs de forme (visibilité) entre éléments (maillages)
- Résolution des échanges d'énergie

$$\boxed{B_i = E_i + \rho_i \sum F_{ij} B_j}$$

Energie émise   Facteur de forme

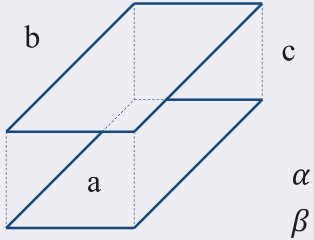
Résolution de $\left(\mathrm{I} - \rho_i \sum F_{ij}\right) = E_i$

Facteurs de forme

- Mesure d'échange entre surfaces
- Calcul analytique de F_{ij} impossible en général: échantillonnage

$$\boxed{F_{ij} = \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{1}{\pi r^2} \cos\phi_i cos\phi_j u_{ij} dA_i dA_j}$$

Fraction de la surface visible de A_i vers A_j



$$x = a/c$$
$$y = b/c$$
$$\alpha = 1 + x^2$$
$$\beta = 1 + y^2$$

$$F_{ij} = \left(\frac{\alpha\beta}{1 + x^2 + y^2}\right)^{1/2} + \frac{2}{\pi x y}\left(y\sqrt{\alpha}\tan^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{\alpha}}\right) - x\tan^{-1}x - y tan^{-1} y\right)$$

LIRIS CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Avantages et limitations

Analyse

- Surfaces diffuses : éclairement indépendant du point de vue [Cohen1988]
- Prise en compte des surfaces spéculaires complexes
- Surfaces maillées uniquement
- Méthode dépassée par les techniques de lancer de rayon

The factory model contains **30 000** patches, and was the most complex radiosity solution computed in 1988. It took approximately **5** hours for 2,000 shots, and the image generation required **190** hours.

Michael F. Cohen, Shen Chang, Eric Chen, John R. Wallace and Donald P. Greenberg. A Progressive Refinement Approach to Fast Radiosity Image Generation, Proceedings of SIGGRAPH, 1988.

LIRIS CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin