

## Examen

*Aucun document autorisé*

Toutes les questions portent sur des surfaces implicites  $S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^2, f(\mathbf{p}) = 0\}$  construites dans le plan à partir de fonctions de distance signée avec  $f > 0$  à l'extérieur. Les réponses seront illustrées à l'aide de notations et de schémas.

### Opérateurs de construction

1) Soit deux surfaces implicites définies par des fonctions  $f$  et  $g$ , quelles sont les expressions des opérateurs union, intersection, et différence ?

### Copie

2) Quelle est l'expression de la fonction  $c$  représentant l'union de  $S$  (définie par  $f$ ) et des trois copies translattées de  $(t, 0)$ ,  $(0, t)$ , et  $(t, t)$  ?

3) Combien d'appels à la fonction  $f$  sont nécessaires pour évaluer  $c(\mathbf{p})$  ?

4) Si la borne de Lipschitz de  $f$  est  $\lambda = 1$ , donner une borne de  $c$ , justifier en une phrase.

### Analyse d'un opérateur de réplication par translation

On considère que la surface implicite  $S$  est contenue dans la boîte comprise entre  $(0,0)$  et  $(t, t)$  (longueur de côté  $t$ ). On définit la fonction  $r(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p} \bmod t)$  où le modulo s'applique aux composantes  $x$  et  $y$  de  $\mathbf{p}$ .

5) Montrer à l'aide d'un schéma que  $r$  définit la réplication d'une infinité de copies de  $S$ .

6) Combien d'appels à la fonction  $f$  sont effectués pour évaluer  $r$  ? Comparer par rapport à l'utilisation de l'opérateur d'union.

7) La fonction  $r$  est-elle généralement continue ? A quelle condition peut-elle l'être ?

8) Proposer une fonction  $\tilde{r}$  à partir de  $r$  pour limiter la réplication à seulement  $n \times n$  copies de  $S$ .