

# Computer Graphics

From mathematics ...



$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$

$$\mathbf{n} = -\nabla f(\mathbf{p}) / |\nabla f(\mathbf{p})|$$

... to the screen

E. Galin  
Université Lyon 1

# Computer Graphics

**Core**

Modeling

Ray Tracing

Meshing

# Computer Graphics

## Introduction

# Introduction

Introduction

Mathematics

Supplementary

## Définition

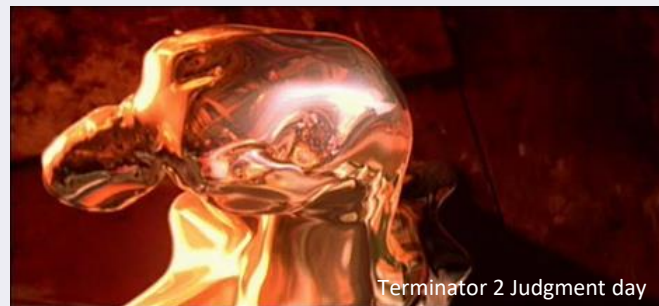
Les **surfaces implicites** sont un modèle **volumique**

Représentation adaptée à la modélisation de volumes de géométrie et de topologie changeante

$$S = \{p \in \mathbb{R}^3, f(p) = 0\}$$

Variété de formes  
Modèle **compact**

Détection de S



Modélisation

Animation

Visualisation

Contrôle de forme  
Raccordements

Habillage de particules  
Contrôle de mouvement

Intersection  $\Delta \cap S$   
Approximation de S



eric.galin@liris.cnrs.fr  
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

# Computer Graphics

## Mathematics

# Définition

Introduction

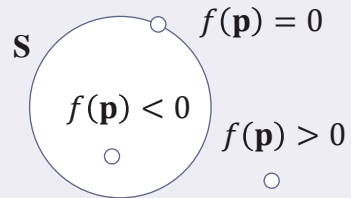
Mathematics

Supplementary

## Définition

Caractérisation de la surface  
Convention **intérieur extérieur**  
variable selon les modèles

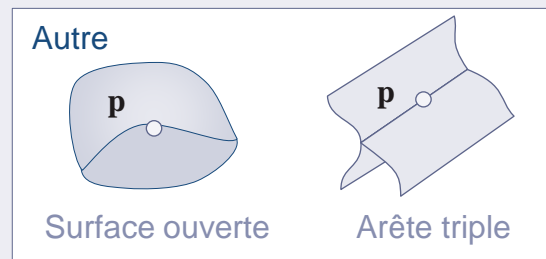
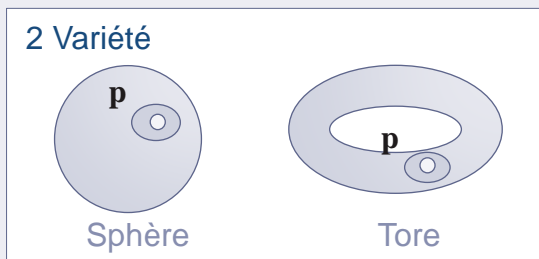
$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$



$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 - 1$$

## Théorème des fonctions implicites

Si 0 est une valeur régulière de  $f$ , alors la surface implicite  $f^{-1}(0)$  est une 2 variété  
Le voisinage autour de tout point  $\mathbf{p}$  de  $S$  est équivalent à un disque



## Théorème de séparation

Une 2 variété sépare  $\mathbf{R}^3$  en une surface  $S$  et deux régions connexes  $E^-$  et  $E^+$   
 $E^-$  finie dans la surface  $S$  et  $E^+$  infinie dehors



eric.galin@liris.cnrs.fr  
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

# Propriétés

Introduction

Mathematics

Supplementary

## Gradient et normale

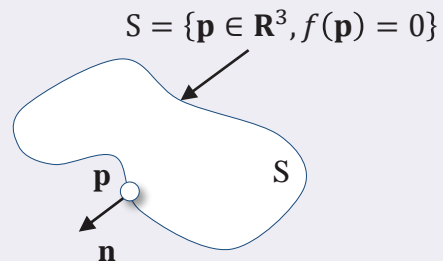
Le gradient peut être calculé en tout point  $\mathbf{p}$

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Approximation de la dérivée  $\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x + \varepsilon, y, z) - f(x - \varepsilon, y, z)}{2\varepsilon}$

Avec la convention  $\mathbf{p}$  dans  $S$  si  $f(\mathbf{p}) < 0$  la normale qui dérive du gradient

$$\forall \mathbf{p} \in S, \mathbf{n} = \nabla f(\mathbf{p}) / |\nabla f(\mathbf{p})|$$



## Suivi de gradient

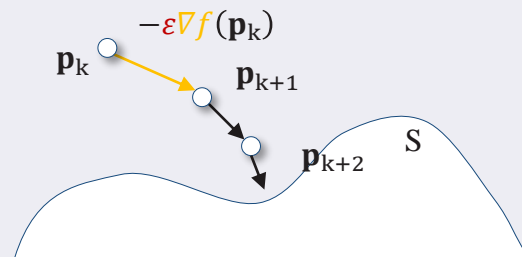
Projection d'un point sur la surface

### Gradient descent

Start from  $\mathbf{p}$

At every step

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} - \varepsilon \nabla f(\mathbf{p})$$



eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalain

## Matrice Hessienne

Matrice carrée  $\mathbf{H}(f)$  des dérivées partielles secondes

$$\mathbf{H}(f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\mathbf{H}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{H}$  définie et symétrique pour  $f$  de classe  $C^2$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^3$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f(x + \varepsilon, y, z) - 2f(x, y, z) + f(x - \varepsilon, y, z)}{\varepsilon^2}$$

## Applications

Nature des points critiques de la fonction  $f$  (annulation de  $\nabla f$ )

Un point critique  $\mathbf{p}$  de  $f$  est dégénéré si  $\det \mathbf{H}(f(\mathbf{p})) = 0$

Classification par analyse du signe des valeurs propres de  $\mathbf{H}(f)$

$\mathbf{H}(f)$  définie positive, la fonction  $f$  atteint un minimum local

$\mathbf{H}(f)$  définie négative, la fonction  $f$  atteint un maximum local

$\mathbf{H}(f)$  a des valeurs propres positives et négatives : point col



# Courbure

Introduction

Mathematics

Supplementary

## Courbure

La courbure se déduit de la matrice  $\mathbf{H}$  de  $f$

$$k_G = \frac{\nabla f \mathbf{H}^* \nabla f^t - |\nabla f|^2 t(\mathbf{H})}{|\nabla f|^4}$$

$\mathbf{H}^*$  matrice des cofacteurs

$t(\mathbf{H})$  trace de  $\mathbf{H}$

$$k_M = \frac{\nabla f \mathbf{H} \nabla f^t - |\nabla f|^2 t(\mathbf{H})}{2|\nabla f|^3}$$



eric.galin@liris.cnrs.fr

<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

R. Goldman. Curvature formulas for implicit curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*. **22**, 632–658, 2005

# Propriété de Lipschitz

Introduction

Mathematics

Supplementary

## Définition

La fonction  $f$  doit être au moins de classe  $C^0$  (les classes  $C^1$  ou  $C^2$  sont plus régulières)  
 $f$  est  $\lambda$  –Lipschitzienne si et seulement si

$$\exists \lambda > 0 \quad \forall (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \quad |f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})| < \lambda |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$$

## Propriétés

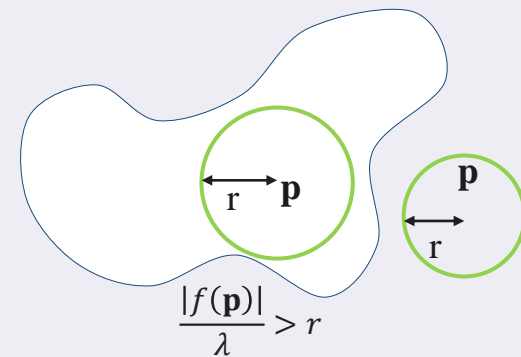
Critère d'exclusion [Hart1996]

$|f|/\lambda$  est une borne inférieure de la distance Euclidienne

Soit  $f$  une fonction  $\lambda$  –Lipschitzienne, alors  $\forall \mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$

$$B(\mathbf{p}, |f(\mathbf{p})|/\lambda) \cap S = \emptyset$$

Boule de centre  $\mathbf{p}$       Rayon  $|f(\mathbf{p})|/\lambda$



eric.galin@liris.cnrs.fr

<http://liris.cnrs.fr/~egalain>

J. Hart. Sphere Tracing: A Geometric Method for the Anti aliased Ray Tracing of Implicit Surfaces, *The Visual Computer*, 12(10), 1996

# Propriété de Lipschitz

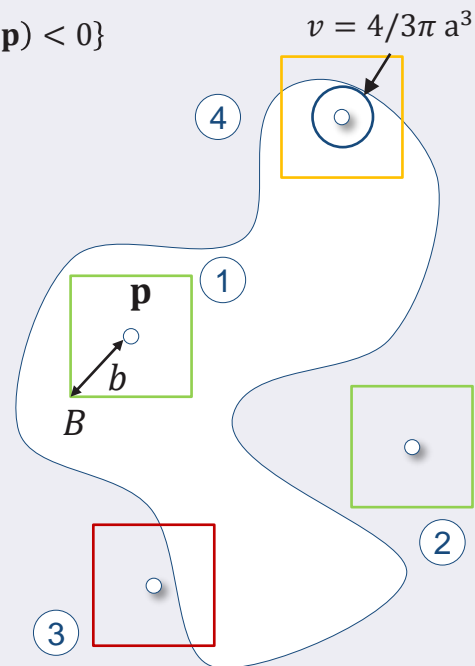
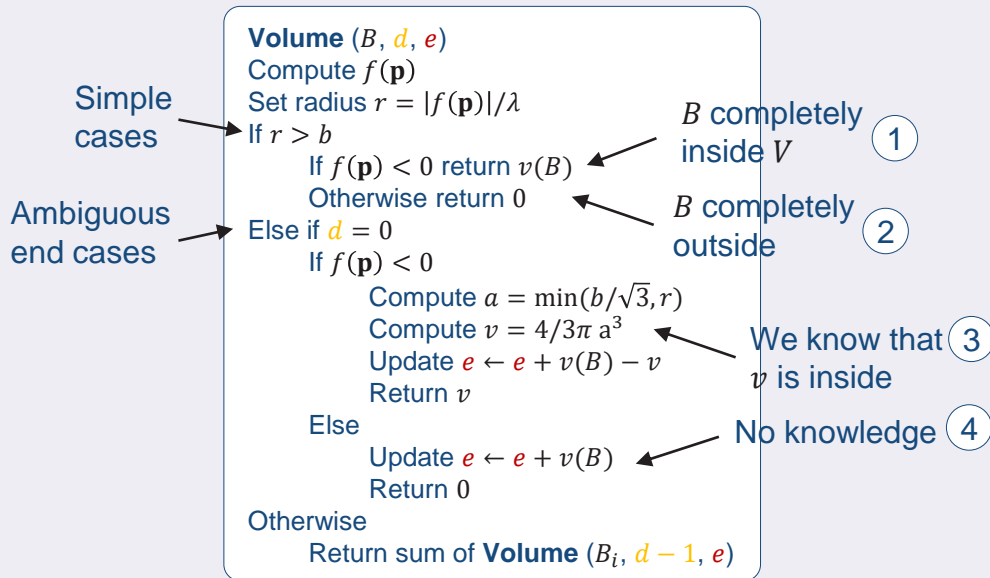
Introduction

Mathematics

Supplementary

## Applications

Algorithme récursif du volume d'une surface implicite  $V = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\mathbf{p}) < 0\}$



eric.galin@liris.cnrs.fr  
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

## Supplementary material

# Scalar Fields

Introduction

Mathematics

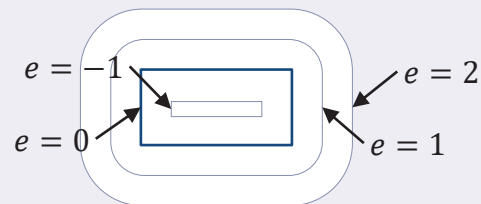
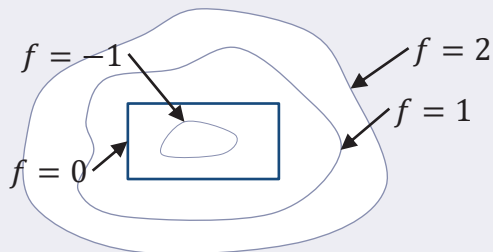
Supplementary

## Interpretation of scalar fields

In general, the signed function  $f$  is not the Euclidean distance to the surface  $S$

If  $f$  is  $\lambda$ -Lipschitz, then  $f/\lambda$  is a **lower signed Euclidean distance bound** to  $S$  [Hart1996]

$$\forall \mathbf{p} \in \mathbf{R}^3 \quad |f(\mathbf{p})|/\lambda < e(\mathbf{p}) \text{ with } e(\mathbf{p}) = d(\mathbf{p}, S)$$



## Euclidean distance

If  $f$  is the signed Euclidean distance to the surface  $S$ , then  $|\nabla f| = 1$

Eikonal equation

Therefore, is 1-Lipschitz



eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalain

J. Hart. Sphere Tracing: A Geometric Method for the Antialiased Ray Tracing of Implicit Surfaces. *The Visual Computer* 12(10), 527-545, 1996.