Computer Graphics

From mathematics …

$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$

$\mathbf{n} = -\nabla f(\mathbf{p}) / |\nabla f(\mathbf{p})|$

… to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Core

Modeling

Ray Tracing

Meshing

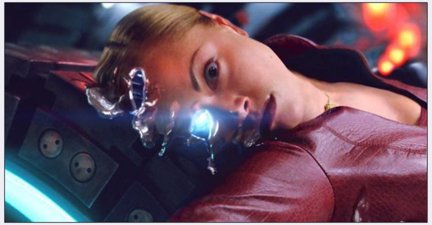
Introduction

Etat de l'art

Problème

Construction de f
Modélisation hiérarchique
Combinaison de formes

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$



- Implicits
  - From data
    - Sampling
      - Radial Basis Functions [Turk 1999]
      - Moving Least Square [Ohtake 2003]
    - Grids
      - Adaptive Distance Fields [Frisken 2000]
      - Level Sets [Whitaker 2004]
  - Construction
    - Functions
      - Fonctions arbitraires [Pasko 1995]
    - Trees
      - Blobs, Metaballs [Blinn 1982]
      - Skeletal models [Wyvill1999, Keinert 2014]

Convolution surfaces [Bloomenthal 1991]

James Blinn. A Generalization of Algebraic Surface Drawing. *ACM Transactions on Graphics*, 1:235, 1982.
A. Pasko, V. Adzhiev, A. Sourin, and V. Savchenko. Function representation in geometric modeling: concepts, implementation and applications. *The Visual Computer*, **2**(8), 429-446, 1995.
B. Wyvill, A. Guy and E. Galin. Extending the CSG Tree (Warping, Blending and Boolean Operations in an Implicit Surface Modeling System). *Computer Graphic Forum*, **18**(2), 149-158, 1999.

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Algebraics

Surfaces algébriques

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

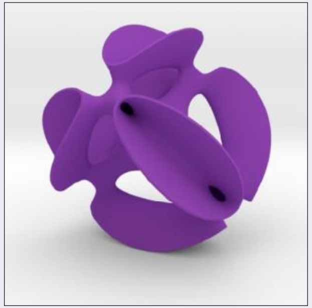
Formulation

Équations polynomiales de degré n
Calcul de $f(\mathbf{p})$ rapide pour un degré faible
Calcul analytique de $\nabla f(\mathbf{p})$
Formes spécifiques : cyclides [Foufou2004]
Manque de contrôle et de variété de formes

$$f(\mathbf{p}) = f(x,y,z) = \sum_{0\leq i+j+k\leq n} a_{ijk}\, x^i\, y^j\, z^k$$

Intersection

Résolution de $f \circ \delta(t) = 0$ équation polynomiale de degré n
Sphere tracing [Hart1996]



Smoothed Kummer Surface

S. Foufou, L. Garnier. Dupin cyclides as quadrics blends for shape modeling. *Computer Graphics Forum*, **23**(3), 321 – 330, 2004

Computer Graphics

Blobs

Définition

Surface S construite à partir de primitives à squelettes ponctuels
Raccordement par une somme de potentiels f_i
Iso surface d'une somme de fonctions potentiel décroissante selon la distance à des sommets

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = T\}$$

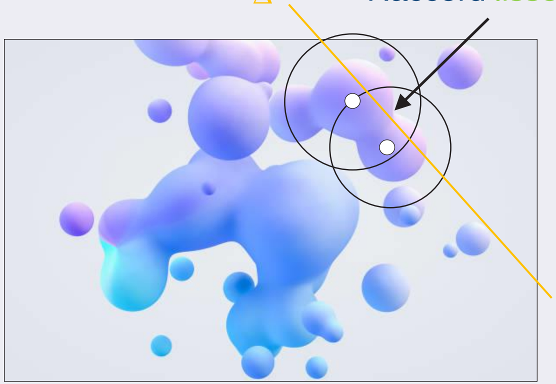
$$f = \sum_i f_i(\mathbf{p})$$

$$f_i(\mathbf{p}) = g_i \circ d_i(\mathbf{p})$$

Fonction d'atténuation   Distance au point $\mathbf{c}_i$

Un élément est caractérisé par un point $\mathbf{c}_i$, sa fonction distance d_i à $\mathbf{c}_i$, une fonction d'atténuation g_i

Δ Raccord lisse

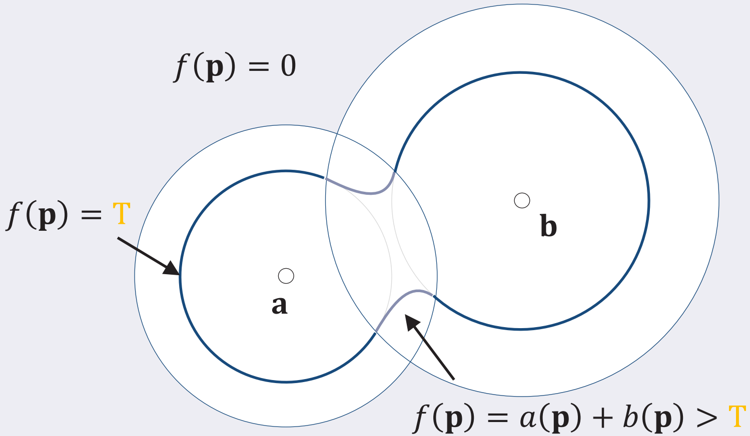


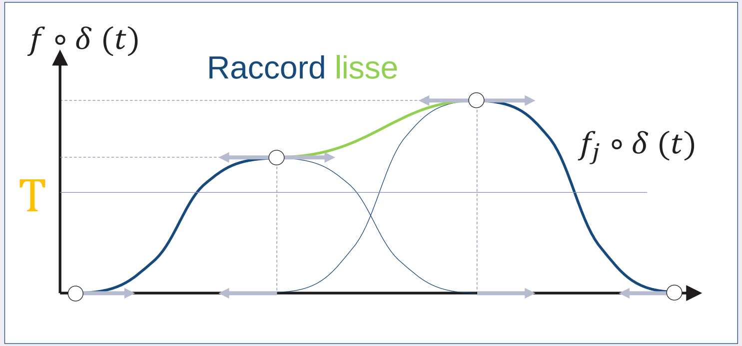
J. Blinn. A Generalization of Algebraic Surface Drawing. *ACM Transactions on Graphics*. **1** (3): 235–256, 1982
B. Wyvill. Data Structure for Soft Objects. *The Visual Computer*, **2**(4): 227 – 234, 1986

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Mélange

La somme des potentiels décroissants selon la distance aux sommets définit le mélange





eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Fonctions d'atténuation

Fonctions potentiel

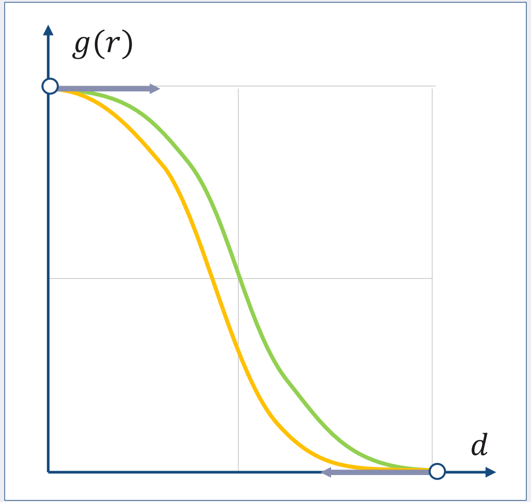
Distribution de potentiel autour du squelette avec certaines propriétés
Symétrie $g(d) = g(1-d)$, centre $g(1/2) = 1/2$
Dérivabilité aux bords $g^n(0) = 0$ et $g^n(1) = 0$
Fonction de carré de la distance d^2 pour éviter le calcul d'une racine

$$g(d) = 2d^3 - 3d^2 + 1$$
Hermite

$$g(d) = (1-d^2)^n \quad n \geq 2$$
Wyvill

$$g(d) = (1-d^2)^2\,(1 - 4/9d^2)$$
Polynomiale

	Régularité	Symétrie	Centre	Carré
Hermite	C^1	✓	✓	✗
Wyvill	C^1	✗	✓	✓
Polynomiale	C^{n-1}	✗	✗	✓



C. Blanc, C. Schlick. Extended Field Functions for Soft Object. *Implicit Surfaces Proceedings*, **1** : 21 – 32, 1995

LIRIS CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Arbre de construction

Construction

Combinaison hiérarchique [Wyvill1999]
Primitives aux feuilles, squelettes complexe : courbes, cube, cône, cylindre, polyèdre
Opérateurs aux nœuds : mélange, union, intersection, différence, déformations

Opérateurs de composition

Union, intersection, différence

$$f_{A\cup B}(\mathbf{p}) = \max(f_A, f_B) \qquad f_{A\cap B}(\mathbf{p}) = \min(f_A, f_B) \qquad f_{A-B}(\mathbf{p}) = \min\ (f_A, 2T - f_B)$$

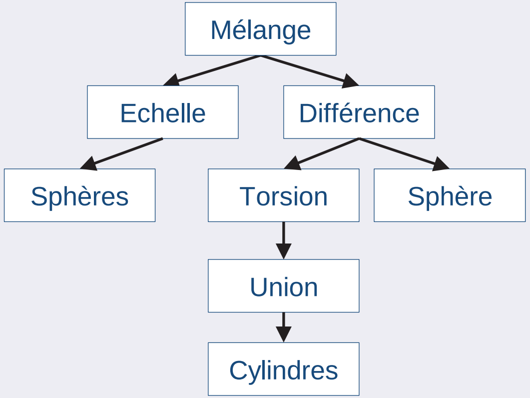
Les fonctions min et max sont C^0
Fonctions plus régulières [Pasko1995]

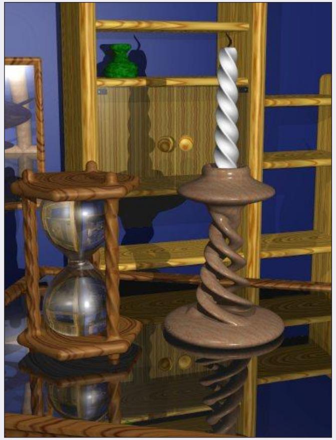
$$f_{A\cup B}(\mathbf{p}) = f_A + f_B + (f_A^2 + f_B^2)^{1/2}$$

Mélange et mélange généralisé

$$f_{A\circ B}(\mathbf{p}) = f_A + f_B$$

$$f_{A*B}(\mathbf{p}) = (f_A^n + f_B^n)^{1/n} \quad n \geq 1$$





B. Wyvill, A. Guy, E. Galin. Extending the CSG-Tree. *Computer Graphics Forum*. **18** (4), 149 – 158, 1999

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Distance fields

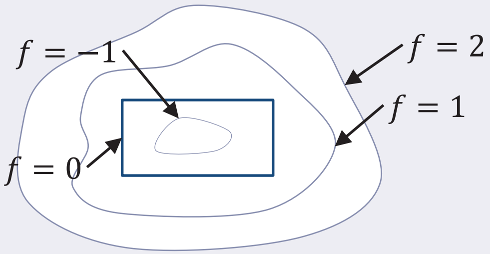
Preliminaries

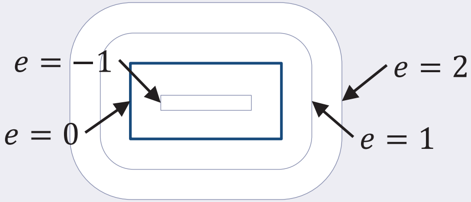
Interpretation of distance field

In general, the signed function f is **not** the Euclidean distance to the surface S

Recall that if f is λ –Lipschitz, then f/λ is a **lower** signed **distance bound** to S [Hart1996]

$$\forall \mathbf{p} \in \mathbf{R}^3 \; |f(\mathbf{p})|/\lambda < d(\mathbf{p}, S)$$





Euclidean distance

Eikonal equation

If f is the signed Euclidean distance to the surface S, then $|\nabla f(\mathbf{p})| = 1$

Therefore, is 1 –Lipschitz

J. Hart. Sphere Tracing: A Geometric Method for the Antialiased Ray Tracing of Implicit Surfaces. *The Visual Computer* **12**(10), 527-545,1996.

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Primitives

Distance à un squelette

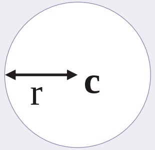
Convention $f(\mathbf{p}) < 0$ si $\mathbf{p}$ dans l'objet, $f(\mathbf{p}) > 0$ dehors
Tore, disque arrondi, barre arrondie, sphère, sphère le long d'une courbe

Vidéo

$$f(\mathbf{p}) = d(\mathbf{p}, S) - r$$

Rayon

Distance (Euclidenne) au squelette



$$f(\mathbf{p}) = ||\mathbf{p} - \mathbf{c}|| - r$$

Vidéo

Snail
© Inigo Quilez

Primitives polygonales (boite, pyramide) : intersections de demi espaces…

$$d(\mathbf{p}, \pi) = (\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n}$$

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Primitives algébriques

Équations polynomiales de degré n

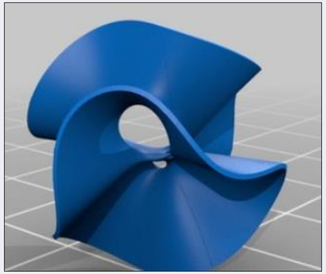
Coordonnées de $\mathbf{p}$

f n'est **pas** une **distance** signée

$$f(\mathbf{p}) = \sum_{0 \le i+j+k \le n} a_{ijk} x^i y^j z^k$$

C'est une pseudo distance

Calcul de $f(\mathbf{p})$ rapide pour un degré faible
Calcul analytique de $\nabla f(\mathbf{p})$ par dérivation
Sur Ω borné, si on connait $\lambda = \sup_{\Omega} |\nabla f|$, alors $f(\mathbf{p})/\lambda$ est une borne de d



Columpius
$x^3y + xz^3 + y^3z + z^3 + 7z^2 + 5z = 0$

J. Blinn, A Generalization of Algebraic Surface Drawing, *IEEE Transactions on Graphics*, **1**(3), 235 – 256, 1982

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Opérateurs de combinaison

Opérateurs booléens

Union, intersection, différence

$f_{A\cup B}(\mathbf{p}) = \min\,(f_A, f_B)$ $\quad$ $f_{A\cap B}(\mathbf{p}) = \max\,(f_A, f_B)$ $\quad$ $f_{A-B}(\mathbf{p}) = \max\,(f_A, -f_B)$

Mélange

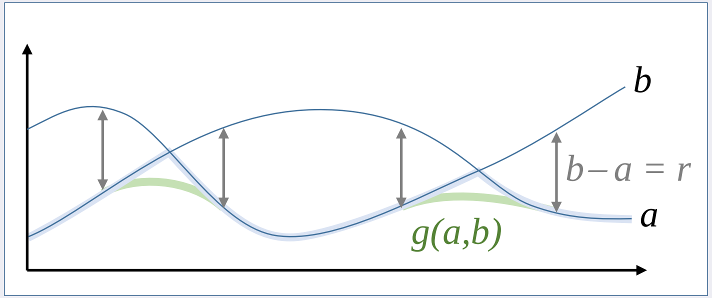
Dans le domaine des Blobs, on calcule $f_A + f_B$ simplement [Wyvill1999]
Modèle plus complexe pour les distances signées

$$f_{A\cup^* B}(\mathbf{p}) = \underbrace{\min\,(f_A, f_B)}_{\text{Union}} - \underbrace{g(f_A, f_B)}_{\text{Offset}}$$

Correction $g(a,b) = \frac{1}{6} r\, h^3$
avec $h = \max(r - |a-b|, 0)/r$

Rayon de mélange

Elephant © Inigo Quilez



B. Wyvill, A. Guy, E. Galin. Extending the CSG-Tree. *Computer Graphics Forum*. **18** (4), 149 – 158, 1999

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Opérateurs de combinaison

Opérateurs Booléens de Rvachev

Fonctions sont C^1 presque partout, C^0 uniquement quand $f_A = f_B = 0$ [Pasko 1995]

$$\boxed{f_{A\cup B}(\mathbf{p}) = f_A + f_B + (f_A^2 + f_B^2)^{1/2}} \quad \boxed{f_{A\cap B}(\mathbf{p}) = f_A + f_B - (f_A^2 + f_B^2)^{1/2}} \quad \boxed{f_{A-B}(\mathbf{p}) = f_{A\cap\bar{B}}}$$

On peut augmenter la continuité à l'ordre $n/2$ en faisant le produit par $(f_A^2 + f_B^2)^{n/2}$

Opérateur de mélange

Union combinée à une correction à support infini [Pasko 1995]

$$\boxed{f_{A\cup^* B}(\mathbf{p}) = \underbrace{f_{A\cup B}(\mathbf{p})}_{\text{Union}} - \underbrace{g(f_A, f_B)}_{\text{Offset}}}$$

$$\boxed{g(a,b) = \frac{a}{1 + \frac{f_A}{r_A} + \frac{f_B}{r_B}}}$$

Limite des opérateurs binaires

Opérateurs non associatifs $(A \cup^* B) \cup^* C \quad A \cup^* (B \cup^* C)$

Le mélange des Blobs était meilleur

A. Pasko, V. Adzhiev, A. Sourin, V. Savchenko. Function representation in geometric modeling. *The Visual Computer*, **11**, 429-446, 1995

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Autres opérateurs de mélange

Fonctions soft max

Approximation s lisse du maximum
Opérateur d'intersection n −aire
Borne : $x_m \leq s(x) \leq x_m + \ln n$

$x_i - x_m < 0$

$$s(x) = \ln\left(\sum_i e^{x_i}\right) = x_m + \ln\left(1 + \sum_{i \neq m} e^{x_i - x_m}\right)$$

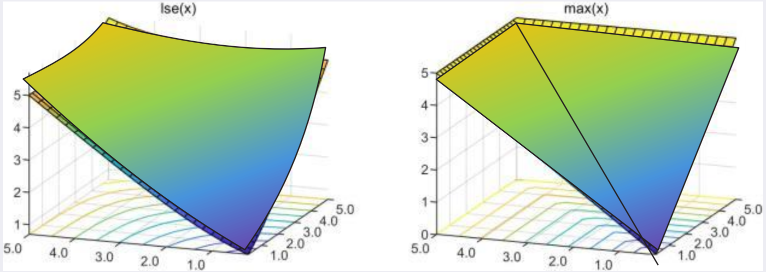
Evite les problèmes de précision

Mellow max

Variante

$$f_{\cup^* A_i}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{\mathrm{r}} \ln_n \left(\sum_i e^{-f_{A_i}(\mathbf{p})/r}\right)$$

$\ln_n(x) = \ln x / \ln n$



Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Transformations affines

Principe

En modélisation implicite, on déforme l'espace par la transformation inverse

$$f_{\omega(A)}(\mathbf{p}) = 1/\|J_{\omega^{-1}}\| f_A \circ \omega^{-1}$$

Norme du Jacobien

Translation, rotation, homothétie

$\|J_{\omega^{-1}}\| = 1$

$\|J_{\omega^{-1}}\| \neq 1$

$$f_{T(A)}(\mathbf{p}) = f_A \circ (\mathbf{p} - \mathbf{t})$$

Translation inverse

$$f_{R(A)}(\mathbf{p}) = f_A \circ R^{-1}(\mathbf{p})$$

Rotation inverse

$R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$

$$f_{S(A)}(\mathbf{p}) = 1/s\, f_A \circ (\mathbf{p}/s)$$

Homothétie inverse

Les compositions de transformations ne sont **pas commutatives**

Matrices de rotation

Différentes matrices selon les repères [Shirley]

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

où $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$

$$R_u(\theta) = \begin{pmatrix} x^2 a + c & xya - sz & xza + sy \\ xya + sz & y^2 a + c & yza - sx \\ xza - sy & yza + sx & z^2 a + c \end{pmatrix}$$

où $a = 1 - \cos\theta$

P Shirley. Fundamentals of Computer Graphics. Third Edition. AK Peters

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

Déformations

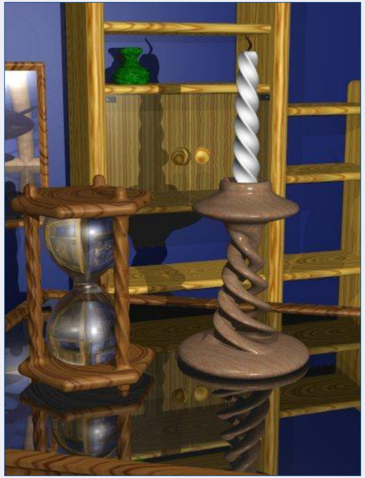
Définition

Déformation d'une région de l'espace
Torsion, écrasement [Barr1984]

$$f_{\omega(A)}(\mathbf{p}) = 1/\|\mathbf{J}_{\omega}^{-1}\| f_A \circ \omega^{-1}$$

La fonction ω doit être **inversible**
Expression du **Jacobien** de ω^{-1} complexe

$$\nabla f_{\omega(A)}(\mathbf{p}) = (\mathbf{J}_{\omega}^{-1})^t(\mathbf{p}) \nabla f_A(\mathbf{p})$$



Perturbation par bruit

Déplacement stochastique $\delta(\mathbf{p})$
Fractional Brownian Motion

$$f_{\omega(A)}(\mathbf{p}) = f_A \circ (\mathbf{p} - \delta(\mathbf{p}))$$

Bruit n ou turbulence t

A. Barr. Global and Local Deformation of Solid Primitives. *Siggraph'84 Proceedings*. **18**, 21 – 30, 1984

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Composition

Formes complexes

Construction de **formes complexes** par assemblage hiérarchique de primitives
Placement d'**instances** et composition dans le graphe de scène

Graphe de scène ⇔ Composition de fonctions ⇔ Appels

Colonne

- Bruit
  - Union
    - Boites
    - Cylindres

Temple

- Union
  - Translation
    - Colonnes
  - Pavés

Temple © Inigo Quilez

LIRIS CNRS Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

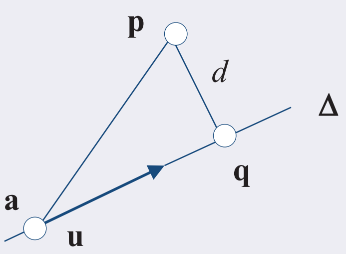
Geometric primitives

Distance à une droite

Pythagore dans le triangle $\mathbf{apq}$

$$d^2(\mathbf{p},\Delta) = (\mathbf{p}-\mathbf{a})^2 - \left((\mathbf{p}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{u}\right)^2$$

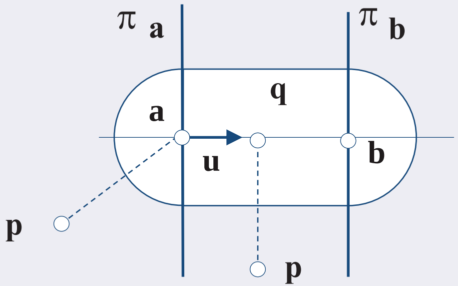
Carré de la distance



Distance à un segment

Calcul de $l = (\mathbf{p}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{u}$ où $\mathbf{u} = (\mathbf{b}-\mathbf{a})/|(\mathbf{b}-\mathbf{a})|$

$$d^2(\mathbf{p},[\mathbf{ab}]) = \begin{cases} (\mathbf{p}-\mathbf{a})^2 & \text{si } l < 0 \\ (\mathbf{p}-\mathbf{a})^2 - \left((\mathbf{p}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{u}\right)^2 & \text{si } 0 < l < |\mathbf{b}-\mathbf{a}| \\ (\mathbf{p}-\mathbf{b})^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

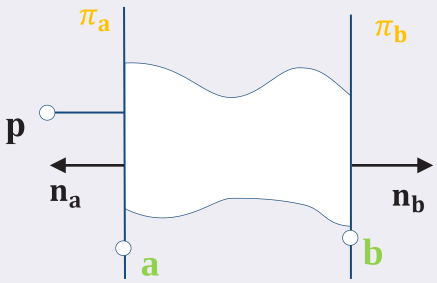


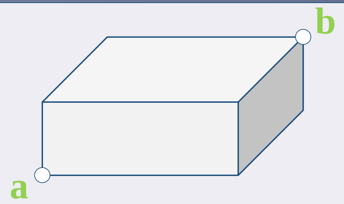
LIRIS CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Distance à une boite

Distance Euclidienne

On utilise la distance entre $\mathbf{p}$ et deux plans parallèles





$$\mathrm{d}(\mathbf{p}, \pi_\mathrm{a} \cap \pi_\mathrm{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{a}_x < \mathbf{p}_x < \mathbf{b}_x \\ \mathbf{a}_x - \mathbf{p}_x & \text{si } \mathbf{p}_x < \mathbf{a}_x \\ \mathbf{p}_x - \mathbf{b}_x & \text{si } \mathbf{p}_x > \mathbf{b}_x \end{cases}$$

$$\mathrm{d}^2(\mathbf{p}, \mathrm{B}) = \mathrm{d}^2(\mathbf{p}, \mathrm{S_x}) + \mathrm{d}^2(\mathbf{p}, \mathrm{S_y}) + \mathrm{d}^2(\mathbf{p}, \mathrm{S}_z)$$

Distance signée

Soit $\mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$ le centre, $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \mathbf{c}$ et $\mathbf{d} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/2$ la diagonale

On tire parti de la symétrie en définissant $\mathbf{q} = \mathrm{abs}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}$

0 si $\mathbf{q} \notin B$

Maximum de $\mathbf{q}_\mathrm{i} < 0$ si $\mathbf{q} \in B$

$$\boxed{\mathrm{d}(\mathbf{p}, B) = \min\left(\max\left(\mathbf{q}_\mathrm{x}, \mathbf{q}_\mathrm{y}, \mathbf{q}_\mathrm{z}\right), 0\right) + |\max(\mathbf{q}, \mathbf{0})|}$$

Norme Euclidienne

0 si $\mathbf{q} \in B$

Vecteur nul

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

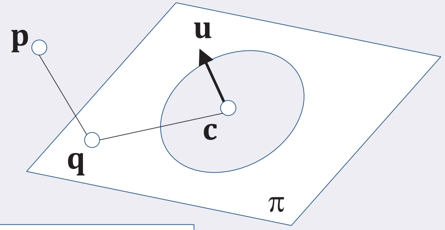
Distance à un cercle ou un disque

Cercle

Par construction $d(\mathbf{p}, C)^2 = d(\mathbf{p}, \pi)^2 + \left((\mathbf{c}-\mathbf{q}) - r\right)^2$ où $\mathbf{q}$ projeté de $\mathbf{p}$

```
double Circle::R(const Vector& p) const {
  Vector n = p – c;
  double h = n * u;
  double d = n * n;                  // Distance to center
  double y = d – h * h ;             // Radial distance
  y = r – sqrt ( y );                // Distance to circle
  return sqrt ( y * y + h * h );
}
```

```
if ( y < r*r ) { return z; }          // Distance to disc
```



Disque

On teste si $|\mathbf{c}-\mathbf{q}| < r$: dans ce cas où l'on calcule la distance au plan π

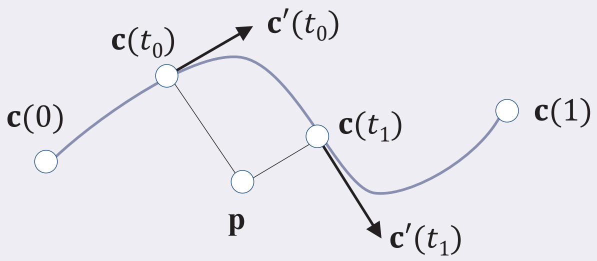
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Distance d'un point à une courbe

Soit Γ une courbe d'équation paramétrée $\mathbf{c}(t)$, $t \in [0,1]$

$$\boxed{d^2(\mathbf{p},\Gamma) = \min_{t\in[0,1]} (\mathbf{c}(t) - \mathbf{p})^2}$$

Polynôme de degré n



Recherche des racines de l'équation

$$\boxed{d^2(\mathbf{p},\Gamma)' = 0 \iff (\mathbf{c}(t) - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{c}'(t) = 0}$$

Equation de degré $2n - 1$

Coût relatif de $\approx 1:20$ pour une courbe quadrique par rapport à une cubique

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Polygone

Minimum de la distance aux segments et test d'intérieur, coût en $O(n)$

$$d(\mathbf{p},\Pi)=s(\mathbf{p})\min_{i\in[0,n-1]} d(\mathbf{p},\mathbf{e}_i)$$

Signe >0 si extérieur à Π, <0 sinon

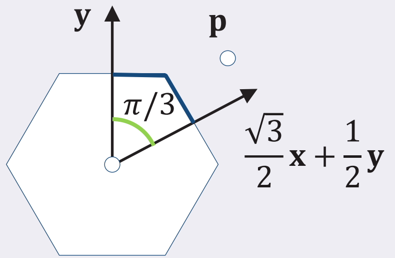
Arête $\mathbf{e}_i=\mathbf{c}_i\mathbf{c}_{i+1}$

```
double Polygon2::Signed(const Vector2& p) const
{
  double r = sqrt(Contour(p));          // Distance to contour
  return Inside(p) ? r : – r ;
}
```

Hexagone, polygones réguliers

Accélération grâce aux symétries, coût en $O(1)$

Distance à deux droites ou à un sommet



eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surfaces de révolution

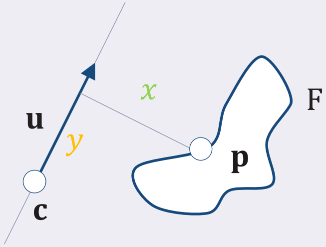
Méthode

Forme $\mathrm{F} \subset \mathbf{R}^2$ définie par sa distance signée $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$

Surface de révolution $\mathrm{S} \subset \mathbf{R}^3$ d'axe d'origine $\mathbf{c}$ et de direction $\mathbf{u}$

$$\boxed{d(\mathbf{p}, \mathrm{F}) = g\big((x, y)\big)}$$

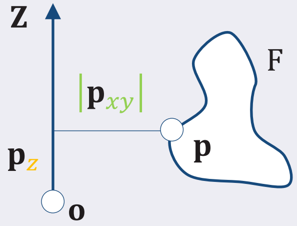
$$x = (\mathbf{p}-\mathbf{c})^2 - \big((\mathbf{p}-\mathbf{c}) \cdot \mathbf{u}\big)^2 \qquad y = (\mathbf{p}-\mathbf{c}) \cdot \mathbf{u}$$



Surface de révolution $\mathrm{R} \subset \mathbf{R}^3$ d'axe $\mathbf{z}$

$$\boxed{d(\mathbf{p}, \mathrm{S}) = g\left(\left(|\mathbf{p}_{xy}|, \mathbf{p}_z\right)\right)}$$

Distance à l'axe z Coordonnées en z



Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Performance and optimization

Trigonometrie

Calcul de $\cos(2k\pi/n)$ et $\sin(2k\pi/n)$ dans une boucle

Set $\mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ with $\theta = 2\pi/n$
Set $\mathbf{u} = (1,0)$
For i from 0 to n
    Computations with $\mathbf{u}$
    $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{R}_\theta \cdot \mathbf{u}$

Stores $\cos(2k\pi/n)$ et $\sin(2k\pi/n)$

Cost $4 \times$ and $2 \pm$ instead of trigonometrics

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Convolution surfaces

Définition

Convolution d'une fonction de géométrie g avec un noyau k

A l'origine, g est une fonction caractéristique et k le noyau Gaussien [Bloomenthal1991]

$$\boxed{f(\mathbf{p}) = g * k(\mathbf{p}) = \int_{\mathbf{R}^3} g(\mathbf{q})k(|\mathbf{p}-\mathbf{q}\,|)\,d\mathbf{q}}$$

Géométrie, squelette

Noyau $k(x) = e^{-x^2}$

Support **infini**, coûteux

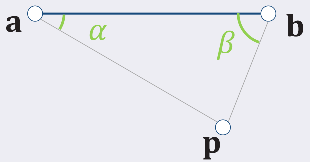
Autres noyaux possibles pour permettre un calcul analytique [Sherstyuk 1999]

$$\boxed{k(x) = \frac{1}{1+\sigma^2 x^2}}$$

Fonction de Cauchy [Sherstyuk 1998]

$$\boxed{k(x) = \frac{1}{x^3}}$$

Puissance inverse [Cani 2001, Hornus 2003]



$$\boxed{f(\mathbf{p}) = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{d^2(\mathbf{p},\mathbf{ab})}}$$

J. Bloomenthal, K. Shoemake. Convolution surfaces. *Computer Graphics* **25**(4), 251-255. 1991.
A. Sherstyuk. Kernel functions in convolution surfaces: a comparative analysis. *The Visual Computer* **15**(4), 171-182, 1999.
J. McCormack, A. Sherstyuk. Creating and rendering convolution surfaces. *Computer Graphics Forum* **17**(2), 113-120, 1998.
Hornus, S., Angelidis, A., Cani, M.-P., Implicit modelling using subdivision curves. The Visual Computer **19**(2–3), 94–104, 2003.

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin