

# Computer Graphics

From mathematics ...



$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$

$$\mathbf{n} = -\nabla f(\mathbf{p}) / |\nabla f(\mathbf{p})|$$

... to the screen

E. Galin  
Université Lyon 1

# Computer Graphics

Core  
Modeling  
Ray Tracing  
**Meshing**

# Computer Graphics

## Introduction

# Classification

Introduction

Meshing

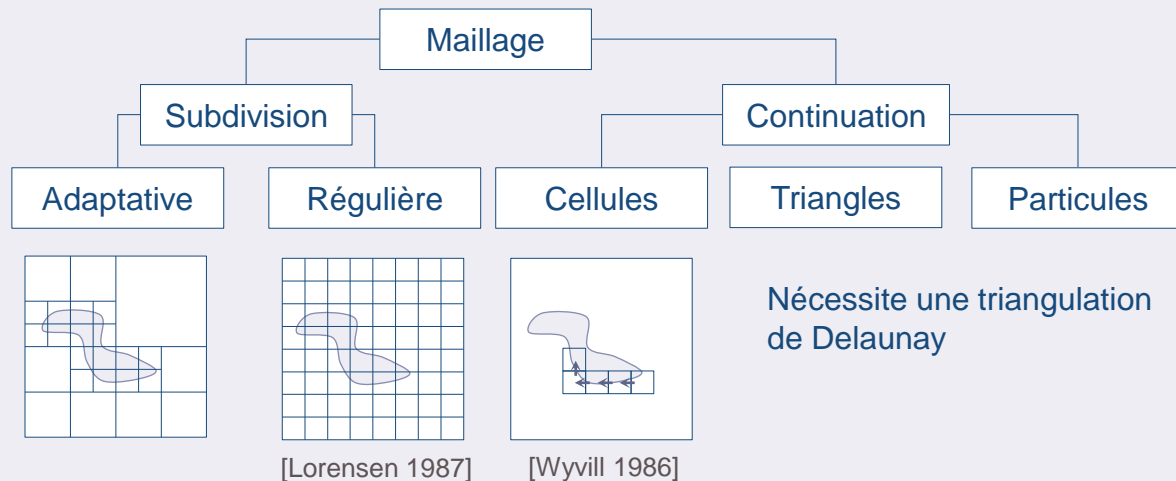
Particles

Appendix

## Classification

**Décomposition** de l'espace  $\mathbf{R}^3$  ou **continuation** sur la surface  $S$

Le maillage  $M$  est une approximation de la surface  $S$



## Critères de qualité

Cohérence topologique, maillage homéomorphe à la surface

Bonne approximation géométrique

Triangles de bonne qualité

L'algorithme rapide et robuste

Appendix : qualité d'un triangle ?

B. Wyvill, C. Mc.Pheeters and G. Wyvill. Data Structure for Soft Objects. *The Visual Computer*, 2(4), 227-234, 1986.

W.E. Lorenzen and H.E. Cline. Marching Cubes: a High Resolution 3D Surface Construction Algorithm. *Computer Graphics*, 21(4), 1987.



eric.galin@liris.cnrs.fr

<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

# Computer Graphics

## Continuation methods

# Décomposition de l'espace

Introduction

Meshing

Particles

Appendix

## Décomposition de l'espace

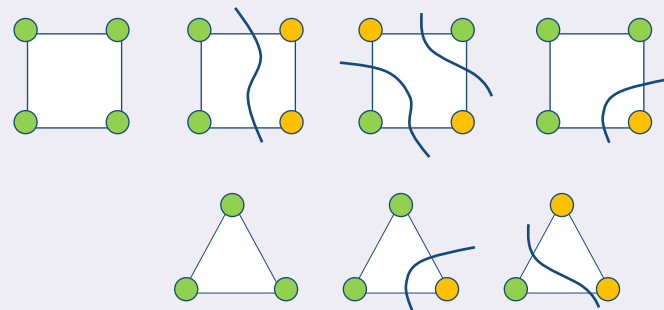
Grille de  $n^3$  cellules cubiques  $C_{ijk}$

Calcul du signe de  $f(\mathbf{p})$  aux sommets

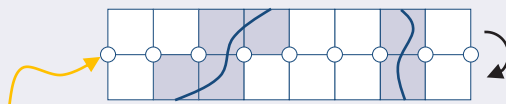
Analyse des  $2^8 = 256$  configurations et maillage

La subdivision en tétraèdres évite les ambiguïtés

Réduction à  $2^4 = 16$  configurations

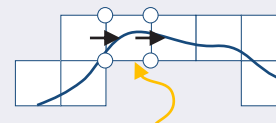


Balayage [Lorenzen1987]  
Coût en  $O(n^3)$



Réutilisation des calculs dans  
le plan entre deux couches

Continuation [Wyvill1986]  
Coût  $O(n^2)$



Réutilisation des calculs  
dans les cubes

Nécessite une  
table de hashage



eric.galin@liris.cnrs.fr  
<http://liris.cnrs.fr/~egalain>

B. Wyvill, C. McPheeters and G. Wyvill. Data Structure for Soft Objects. *The Visual Computer*, 2(4), 227-234, 1986.  
W.E. Lorenzen and H.E. Cline. Marching Cubes: a High Resolution 3D Surface Construction Algorithm. *Computer Graphics*, 21(4), 1987.

# Approches hiérarchiques

Introduction

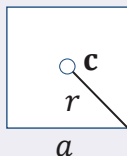
Meshing

Particles

Appendix

## Subdivision adaptative

Critère de Lipschitz déterminant que  $S \cap B = \emptyset$



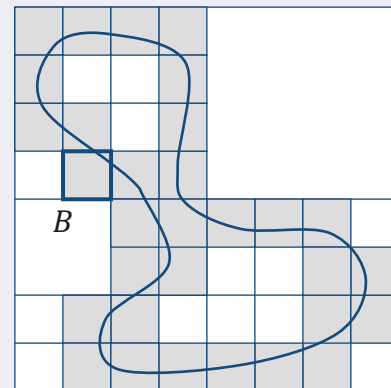
$$|f(\mathbf{c})|/\lambda > r \Rightarrow S \cap B = \emptyset$$

Centre

Rayon de la cellule

$$r = \sqrt{3} a$$

Taille du coté



```
Let  $B$  the cell,  $\mathbf{c}$  its center,  $r$  its radius  
If  $B$  is a terminal cell  
  Update mesh with triangles in  $B$   
Else  
  If  $|f(\mathbf{c})|/\lambda > r$   
    End of recursion  
  Else  
    Apply recursion to sub-cells
```

$2^8$  configurations,  
Vertices  $\mathbf{v}_k$  of  $S \cap B$

## Difficultés

Générer la connectivité : ne pas recalculer les sommets  $\mathbf{v}_k$  et  $\mathbf{c}$  entre cellules  
Utiliser une borne de Lipschitz locale  $\lambda_B = \sup_B |\nabla f|$  meilleure que  $\lambda$  globale

Nécessite une table de hashage



eric.galin@liris.cnrs.fr  
http://liris.cnrs.fr/~egalin

# Marching Triangles

Introduction

Meshing

Particles

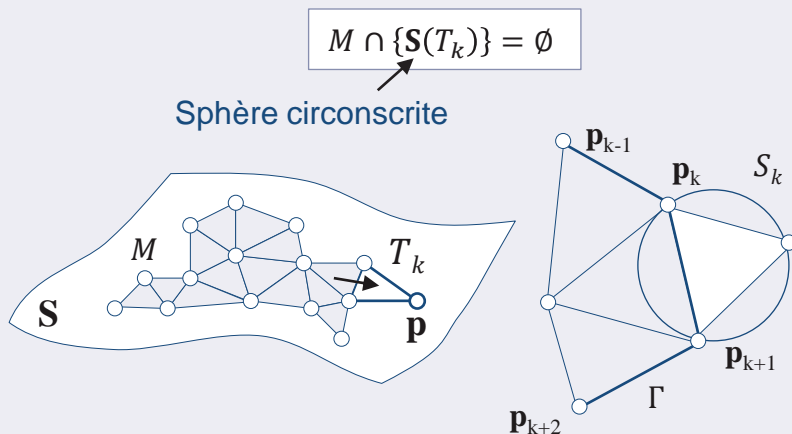
Appendix

## Principe

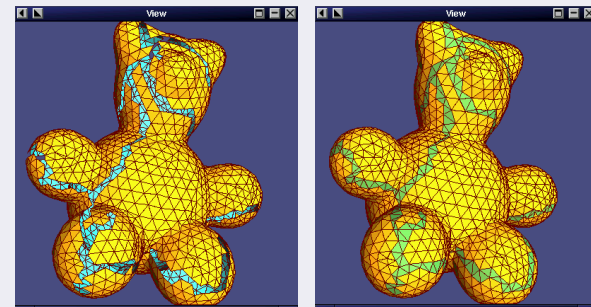
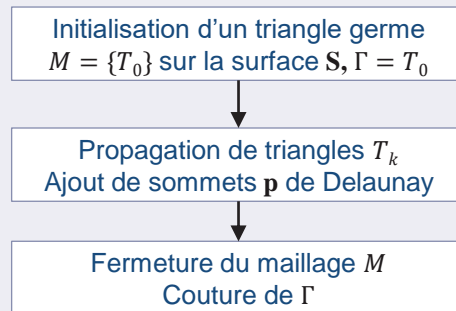
Construction de triangles quasi équilatéraux [Hilton1996] sur la surface  $S$

Critère de la sphère vide pour l'ajout d'un triangle

Mise à jour d'une courbe frontière  $\Gamma$  de propagation



Adaptation à la courbure [Akkouche2001]



eric.galin@liris.cnrs.fr  
<http://liris.cnrs.fr/~egalain>

A. Hilton, A. Stoddart, J. Illingworth and T. Winder. Marching triangles: range image fusion for complex object modelling, IEEE, 1996  
S. Akkouche and E. Galin. Adaptive Implicit Surface Polygonization using Marching Triangles. *Computer Graphic Forum*, 20(2), 2001.



# Computer Graphics

## Particles

# Particules

Introduction

Meshing

Particles

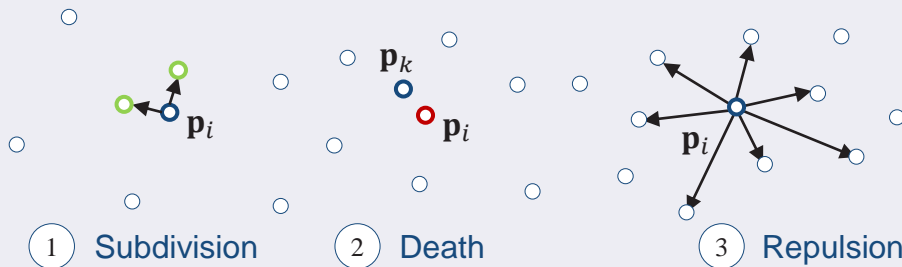
Appendix

## Principe

Méthode générale [Witkin1994] pour les formes implicites  
Produit un nuage de points  $P$  sur  $S$  ; maillage par Delaunay

```
Initialize  $P = \{p_0\}$  on  $S$  as unstable  
While  $P$  unstable  
  For all particles  $p_i \in P$   
    Find set of neighboring particles  $N(p_i)$   
    If  $N$  is not dense  
      Subdivide  $p_i$  into two particles (1)  
    If  $N$  is too dense  
      Kill particle  $p_i$  (2)  
    Otherwise  
      Move particle  $p_i$  by repulsion (3)
```

$n$  – nearest neighbors



$$\delta_i \propto \sum_{q \in N(p_i)} k(\|p_i - q\|) (p_i - q)$$

Kernel      Direction towards other particles



eric.galin@liris.cnrs.fr  
http://liris.cnrs.fr/~egalin

A. Witkin and P. Heckbert. Using Particles to Sample and Control Implicit Surfaces. *Computer Graphics*, 28, 269-278, 1994.

# Accélération pour les arbres de construction

Introduction

Meshing

Particles

Appendix

## Principe

Echantillonnage  $P_i$  de la surface  $S_i$  des primitives

Combinaison des  $P_i$  au niveau des opérateurs [Galin2006]

Suppose des primitives à support compact [Wyvill 1999]

Compute the samples  $P_i$  and  $P_j$  of the two subtrees

Freeze the particles of  $P_i$  and  $P_j$

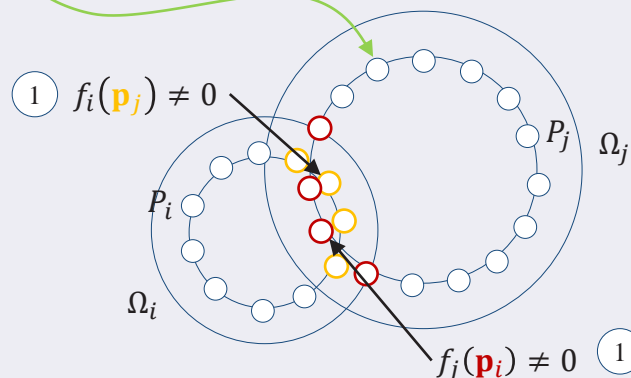
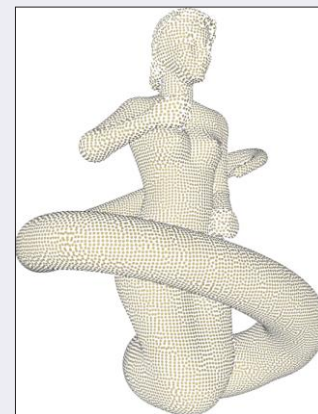
Remove  $\mathbf{p}_i \in P_i$  such that  $f_j(\mathbf{p}_i) \neq 0$

1

Similarly with  $\mathbf{p}_j \in P_j$  such that  $f_i(\mathbf{p}_j) \neq 0$

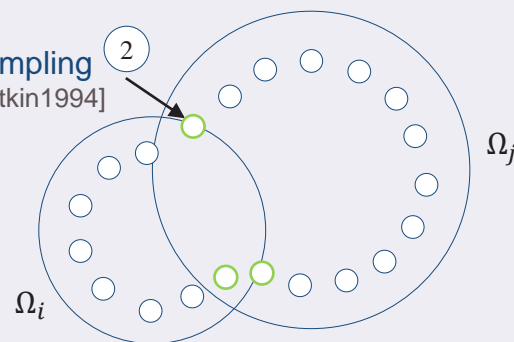
Complete sampling with Witkin's algorithm

2



Sampling

[Witkin1994]



E. Galin, R. Allègre and S. Akkouche. A Fast Particle System Framework for Interactive Implicit Modeling. *Shape Modeling International*, 2006.

eric.galin@liris.cnrs.fr

<http://liris.cnrs.fr/~egalain>

# Computer Graphics

## Appendix

# Qualité de maillage

Introduction

Meshing

Particles

Appendix

## Cercles circonscrits et inscrits

Calcul de  $r$  et  $R$

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

$$u = (s - a)(s - b)(s - c)$$

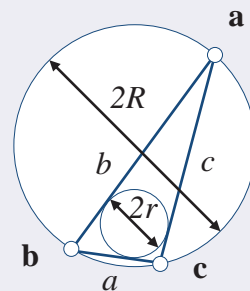
$$r = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{s}}$$

$$R = \frac{abc}{4A} = \frac{abc}{4\sqrt{su}}$$

Définitions équivalentes

$$r = \frac{|\mathbf{ab} \times \mathbf{ac}|}{\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}}$$

$$R = \frac{\mathbf{ab} \cdot \mathbf{bc} \cdot \mathbf{ca}}{2|\mathbf{ab} \times \mathbf{ac}|}$$



## Aspect d'un triangle

On définit  $\rho = 2r/R \in [0,1]$

$$\rho = \frac{8u}{abc}$$



eric.galin@liris.cnrs.fr  
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>