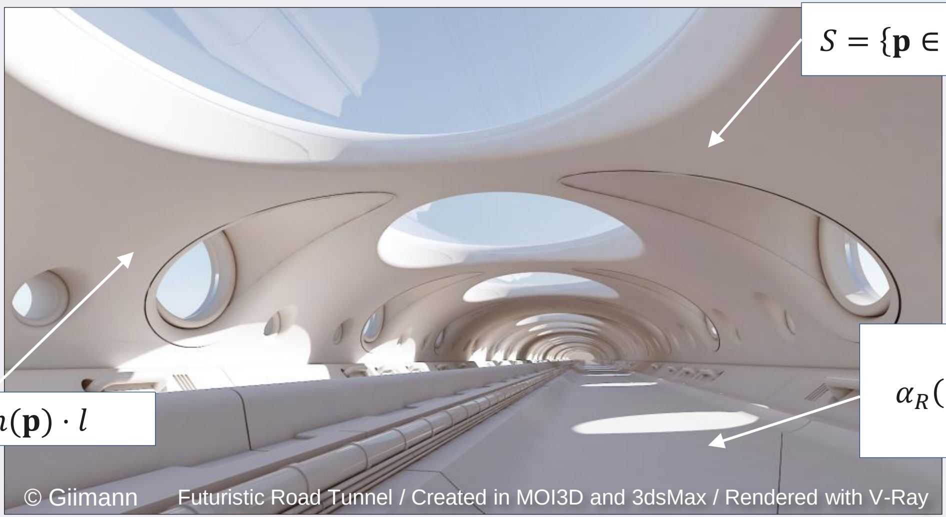
Computer Graphics

From mathematics …

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$



© Giimann Futuristic Road Tunnel / Created in MOI3D and 3dsMax / Rendered with V-Ray

$$d(\mathbf{p}) = n(\mathbf{p}) \cdot l$$

$$\alpha_R(\mathbf{p}) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \delta_i$$

… to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Overview

Deformations

Curves

Surfaces

Introduction

Modélisation géométrique

Description de la forme et des propriétés géométriques et topologiques de l'objet
Modèles volumiques ou surfaciques

Modèle

Algorithmes — Structures de données

Traitements géométriques — Caractéristiques géométriques

Traitements géométriques élémentaires

Intersection avec une droite $\Delta \cap O$ ou entre objets $O \cap O$
Position d'un point par rapport au modèle $\mathbf{p} \in O$
Recherche d'un point $\mathbf{p}$ sur la surface ∂O
Génération des triangles T approximant la surface ∂O

Adapté aux requêtes surfaciques

Adapté aux requêtes volumiques

Surfacique
Surfaces paramétrées
Subdivisions
Maillages
Champs de hauteur

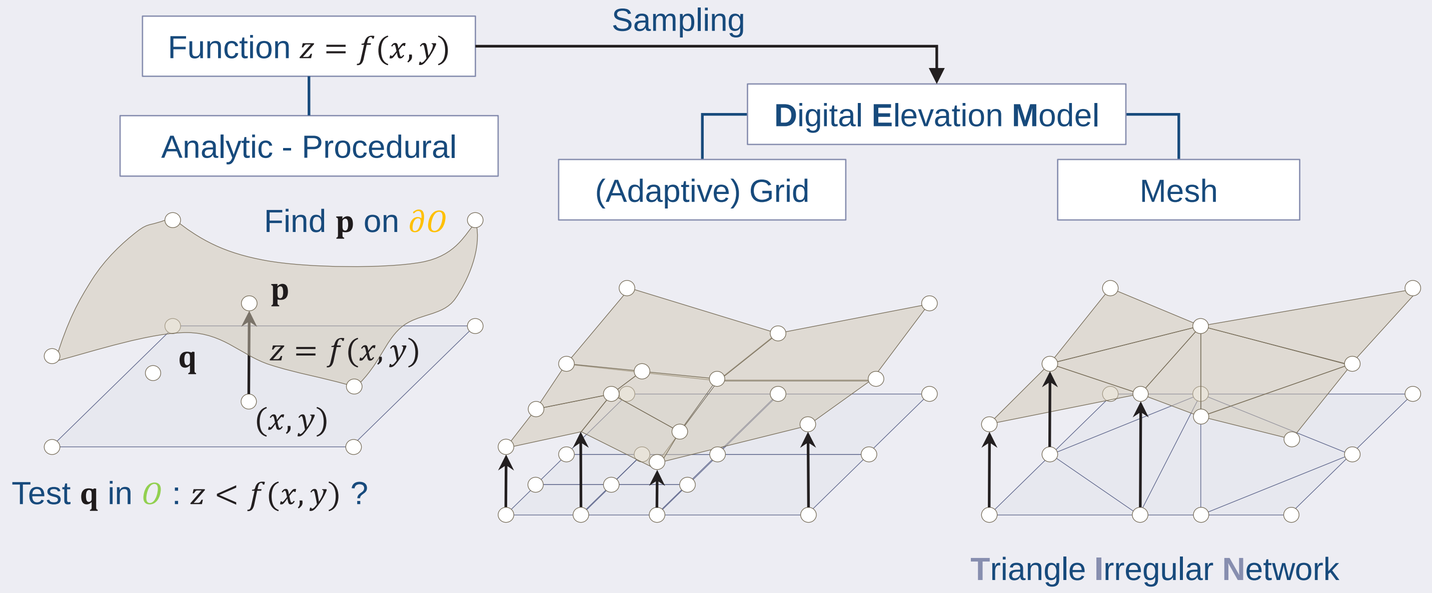
Volumique
Composition arborescente
Enumération spatiale
Génération par balayage
Surfaces implicites

Il n'existe **pas** de modèle universel

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Modèles particuliers

Les modèles d'élévations peuvent être considérées à la fois comme surfaciques et volumiques
Leur représentation permet d'interroger O comme ∂O

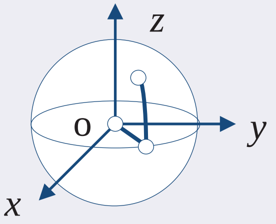


Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surface models

Définition

On définit $S = \{\mathbf{p}(u,v), (u,v) \in \Omega\}$
Différents types de surfaces selon les fonctions $\mathbf{p}(u,v)$



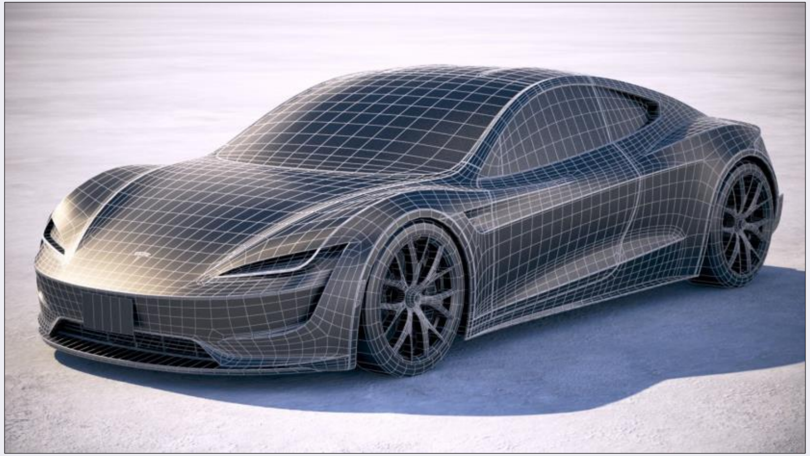
Construction

$\mathbf{p}(u,v)$ est défini par des polynômes
Construction à partir de points de contrôle $\mathbf{p}_{ij}$
Régularité des carreaux
Génération des triangles approximant S trivial

Sphère paramétrée
$\mathbf{p}(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\varphi)$
$(\theta,\varphi) \in [0,2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$

$$\mathbf{p}(u,v) = \sum_{(i,j)\in[0,n]^2} B_i^n(u) B_j^n(v)\, \mathbf{p}_{ij}$$

$$\mathbf{p}(u,v) = (u^3\ u^2\ u\ 1)\ \mathbf{M}\left[\mathbf{p}_{ij}\right](v^3\ v^2\ v\ 1)^t$$



Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Maillages géométriques

Maillages triangulaires

Géométrie G : sommets $\mathbf{p}$ et normales $\mathbf{n}$ ← Coordonnées $\in \mathbf{R}^3$

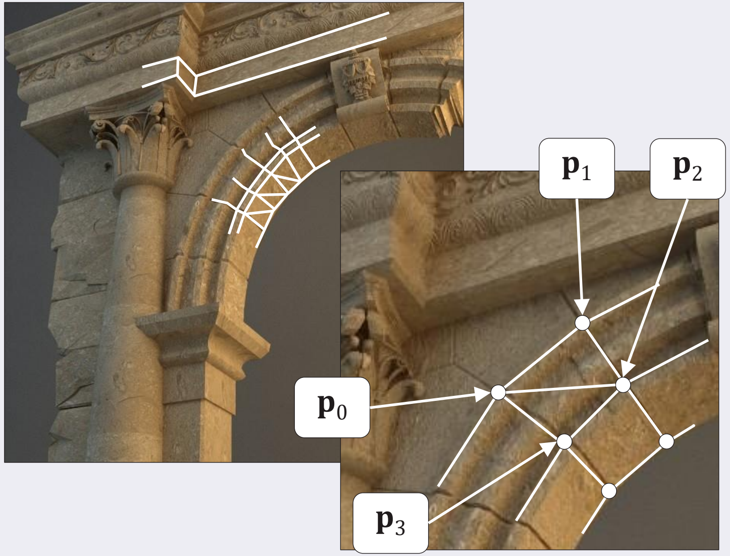
Topologie T : connectivité entre sommets, arêtes, faces

Master

Structure minimale

Sommets connectés en triangles : T fixe ← Indices entiers $\in \mathbf{N}$

Triplets $\{a, b, c\}$ ou double triplet $\{a, n_a, b, n_b, c, n_c\}$ pour chaque triangle



Géométrie G	Topologie T
$\mathbf{p}_0$	0 3 2
$\mathbf{p}_1$	1 0 2
$\mathbf{p}_2$	
$\mathbf{p}_3$	

```
class Mesh {
  std::vector<Vector> p ;          // Vertexes
  std::vector<int> t ;             // Indexes
};
```

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surfaces de subdivision

Modélisation

Création d'une surface (à la limite S_∞ lisse) à partir d'un squelette maillé de contrôle S_0

$$\boxed{S_n = \phi \circ \cdots \circ \phi(S_0)}$$

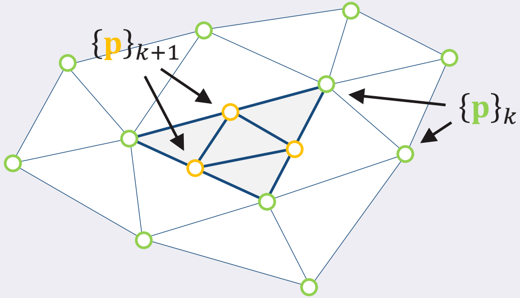
Le nombre de triangles croit de manière géométrique

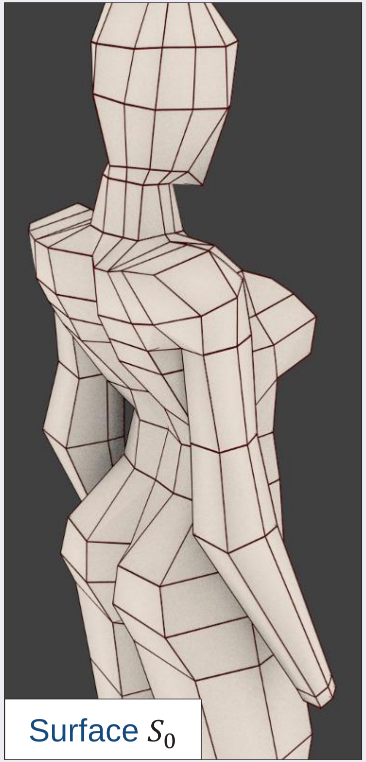
$$\boxed{\#S_n = s^n \#S_0}$$

$s = 4$ pour Loop $n \approx 4$ suffit souvent

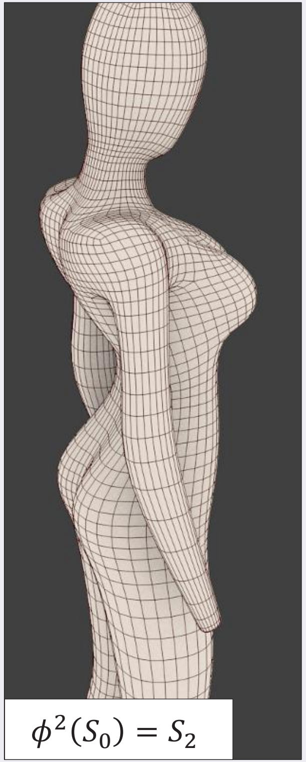
Subdivision dyadique

Un triangle de S_k se décompose en 4 triangles de S_{k+1}
Coordonnées de $\{\mathbf{p}\}_{k+1}$ fonction des parents $\{\mathbf{p}\}_k$





Surface S_0



$\phi^2(S_0) = S_2$

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Schémas de raffinement de maillage

Les schémas d'interpolation préservent les $\{\mathbf{p}\}_k$
Les schémas d'approximation modifient les coordonnées de $\{\mathbf{p}\}_k$ à chaque subdivision

Catégories

- Approximation : $\{\mathbf{p}\}_k$ modifiés
  Loop, Catmull-Clark (C^2)
- Interpolation : $\{\mathbf{p}\}_k$ fixes
  Modified Butterfly, Kobbelt (C^1)

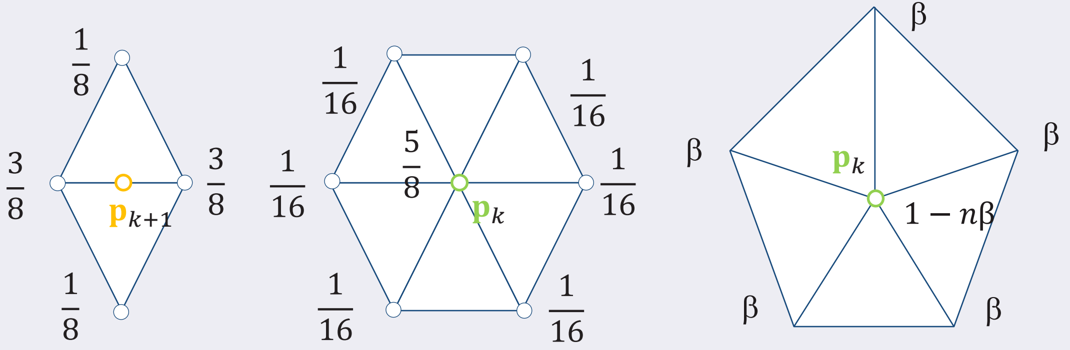


Schéma de Loop

E. Catmull and J. Clark. Recursively generated B-Spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer Aided Design,* **10**(6):350–355, 1978.

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Comparaison

Analyse

Compromis entre contrôle, compacité, flexibilité

Surfaces paramétrées
$S = \{\mathbf{p}(u,v), (u,v) \in \Omega\}$

Surfaces de subdivision
$S_k = \phi^k(S_0)$

Maillages
$M = \{G, T\}$

Data

Compact mais sans **contrôle**

Patchs de Bézier
$\mathbf{p}(u,v)$

Contrôle sur base polynomiale

Contrôle

Général : **approxime** toute surface

Structure coûteuse en **mémoire**

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Volumetric models

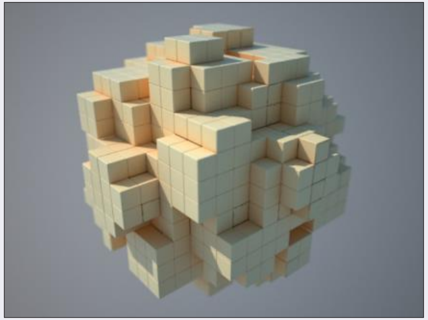
Enumération spatiale

Structure régulière

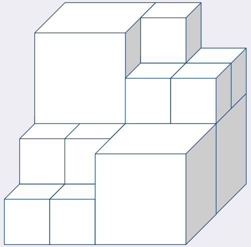
Subdivision de l'espace en grille régulière
Stockage du type de matériau dans les cellules

$$V = \cup C_{ijk}$$

Union de cellules cubiques

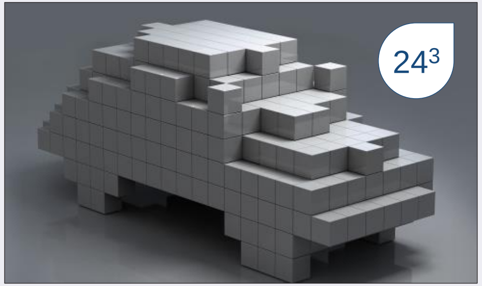


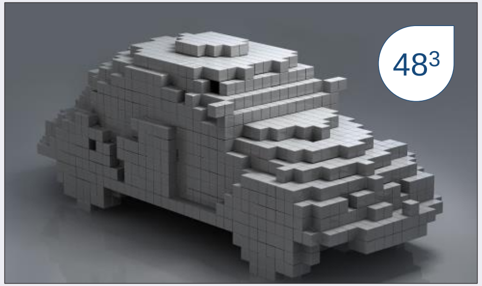
Coût : $O(n^3)$ cellules, accès efficace en $O(1)$
Traitements locaux efficaces, coûteux sur l'ensemble du modèle

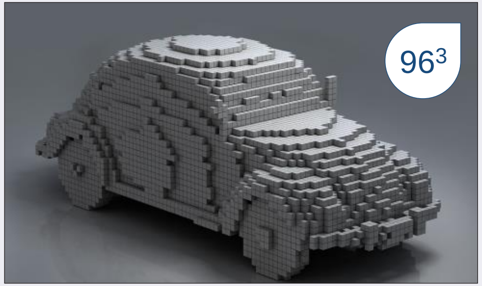


Améliorations

Compression des données : redondances et motifs fréquents
Structure adaptative : octrees et sparse voxel octrees







S. Laine, T.Karras. Efficient sparse voxel octrees. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* **17**(8), 2011.
V. Kampe, E. Sintorn, U. Assarsson. High Resolution Sparse Voxel DAGs. *Proceeding of Siggraph*, 2013.

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Construction arborescente

Structure

Arbre de construction **hiérarchique**

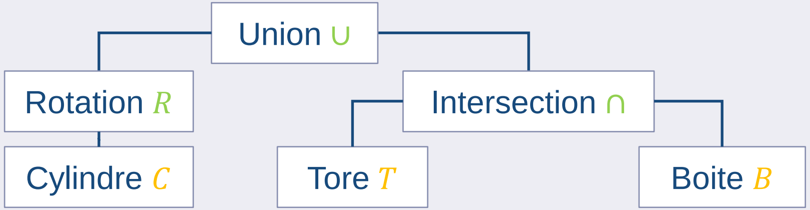
Primitives aux feuilles sont combinées par des opérateurs

$$V = \cup\left(R(C), \cap\left(T, B\right)\right)$$

Primitive

Transformation affine

Opérateur **booléen**



© Yoru Chamber

Modèles dérivés

Unions de sphères : opérateurs union ∪ et primitives sphères S uniquement

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

Construction arborescente

Requêtes

Position d'un point par rapport au modèle $\mathbf{p} \in O$

Descente récursive de l'arbre jusqu'aux feuilles

Inside $(\mathbf{p}, N)$: Test if $\mathbf{p}$ inside a node N

If N is a leaf then

  Test the primitive, e.g. a sphere : $\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| < r$

Else if N is a Union node

  Test Inside $(\mathbf{p}, N \to L\,(\mathbf{p}))$ or Inside $(\mathbf{p}, N \to R\,(\mathbf{p}))$

Else if N is a transformation

  Compute Inside $(\mathbf{p}, N \to C\,(T^{-1}(\mathbf{p})))$

Union $\boxed{\mathbf{p} \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \text{ si } \mathbf{p} \in \mathrm{A} \text{ et } \mathbf{p} \in \mathrm{B}}$

Récursion

Sphère $\boxed{\mathbf{p} \in S \text{ si } \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| < r}$

Test terminal

Transformation $\boxed{\mathbf{p} \in \mathrm{T(A)} \text{ si } T^{-1}(\mathbf{p}) \in \mathrm{A}}$

Récursion avec la transformation inverse

Université Claude Bernard Lyon 1

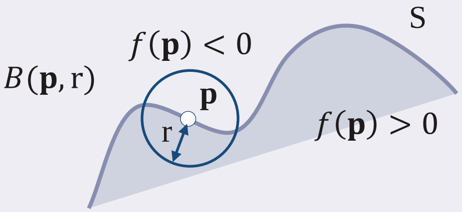
eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surfaces Implicites

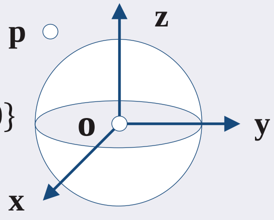
Définition

On définit $S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3 \; f(\mathbf{p}) = 0\}$



Sphère implicite

$S = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \in \mathbf{R}^3 \; 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$

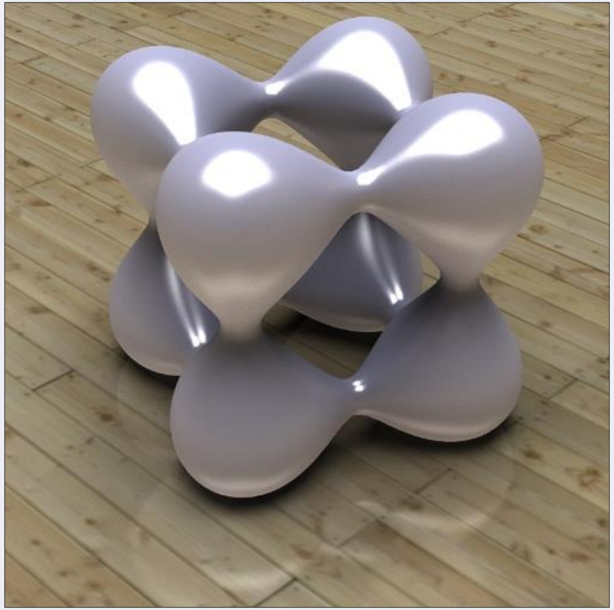


Propriétés

- Modélisation de formes lisses (raccordement)
- Objets de topologie variable
- Visualisation complexe

Catégories

- Surfaces implicites à squelettes
- Surfaces variationnelles (nuages de points)



B. Wyvill, A. Guy and E. Galin. Extending the CSG Tree (Warping, Blending and Boolean Operations in an Implicit Surface Modeling System). *Computer Graphics Forum*, **18** (2), 149-158, 1999.

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Comparaison

Analyse

Compromis entre contrôle, compacité, flexibilité

Data

Voxels
$V = \cup\, C_{ijk}$

CSG
$V = \cup\left(-(\cdot,\cdot), \cap\,(\cdot,\cdot)\right)$

Surfaces Implicites
$V = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3\, f(\mathbf{p}) < 0\}$

Unions de cubes organisés en grille

Opérateurs booléens de formes simples

Opérateurs et formes définies par des fonctions

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Conclusion