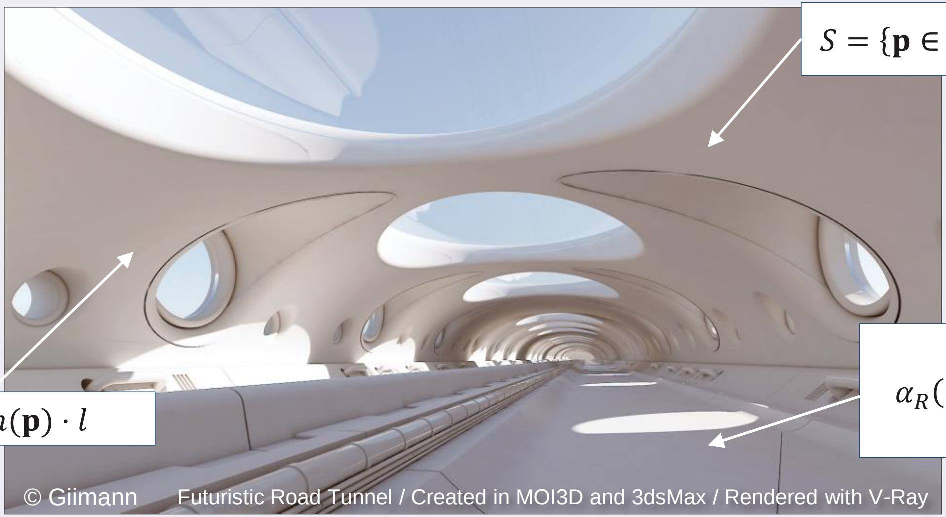
Computer Graphics

From mathematics …

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$



$$d(\mathbf{p}) = n(\mathbf{p}) \cdot l$$

$$\alpha_R(\mathbf{p}) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \delta_i$$

… to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Overview

Deformations

Curves

Surfaces

Courbes dans l'espace

Forme paramétrique ou implicite

$$C = \{\mathbf{p} = f(t) \in \mathbf{R}^3 \;\; t \in \Omega\}$$

Equation paramétrique

Intersection des surfaces

$$C = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3 \; f(\mathbf{p}) = 0 \wedge g(\mathbf{p}) = 0\}$$

Surfaces

$$S = \{\mathbf{p} = f(u, v) \in \mathbf{R}^3 (u, v) \in \Omega\}$$

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3 \; f(\mathbf{p}) = 0\}$$

Forme explicite

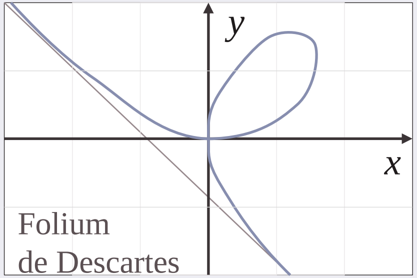
$$C = \{\mathbf{p}(x, f(x)), x \in \Omega \subset \mathbf{R}\}$$

$$S = \{\mathbf{p}(x, y, f(x, y)), (x, y) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2\}$$

Patchs de Monge
ou surfaces d'élévation

$$\mathbf{p}(t) = (3t/(1 + t^3), 3t^2/(1 + t^3)), \; t \in \mathbf{R} - \{-1\}$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$



eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Rappels

Courbe C paramétrée sur un intervalle unité : $C = \{\mathbf{p}(t), t \in [0,1]\}$
Souvent, on a besoin de $\mathbf{p}'(t)$ et $\mathbf{p}''(t)$
Approximation de la dérivée première et seconde

$$\boxed{\mathbf{p}'(t) \approx \frac{\mathbf{p}(t+\varepsilon) - \mathbf{p}(t-\varepsilon)}{2\varepsilon}}$$

$$\boxed{\mathbf{p}''(t) \approx \frac{\mathbf{p}(t+\varepsilon) - 2\mathbf{p}(t) + \mathbf{p}(t-\varepsilon)}{\varepsilon^2}}$$

Factoriser les appels si besoin de $\mathbf{p}'$ et $\mathbf{p}''$

LIRIS CNRS Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

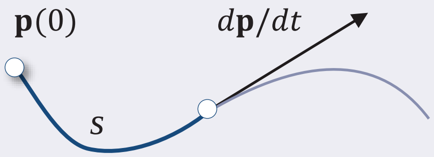
Fundamentals

Tangente

Tangente à la courbe en $\mathbf{t}(t) = \mathbf{p}'(t)$

$$\hat{\mathbf{t}}(t) = \mathbf{p}'(t)/|\mathbf{p}'(t)|$$

Vitesse v



$$s = \int_0^t ds = \int_0^t |\mathbf{p}'(u)|du$$

Longueur d'arc

Longueur d'arc élémentaire

$$ds = |\mathbf{p}'(u)|du$$

Longueur d'une courbe paramétrique sur l'intervalle $[0,t]$

Point régulier de la courbe $\mathbf{p}'(t) \neq 0$

Normale

Vecteur (unitaire) $\hat{\mathbf{n}}$ orthogonal à $\mathbf{t}$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{p}''}{|\mathbf{p}''|} = \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|}$$

On définit la courbure comme

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = |\mathbf{p}''(s)|$$

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Dans le plan

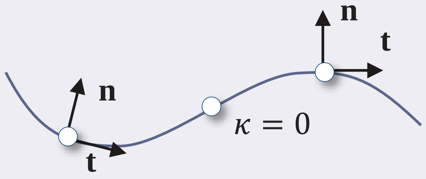
Courbes planes

Courbure signée en définissant le vecteur $\mathbf{n} = \mathbf{t}^{\perp}$

Le système $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{z})$ est orthonormé

Changement de signe aux points d'inflexion

$$(x, y)^{\perp} = (-y, x)$$



Courbure

Paramétrage quelconque en t

$$\kappa(t) = \frac{\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)}{\|\mathbf{p}'(t)\|^3} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

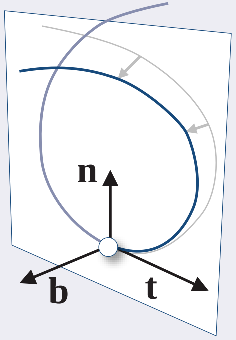
Appendix : points où $\kappa(t)$ est extrémal ?

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Dans l'espace

Vecteur bi normal $\mathbf{b}$
Le système $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ est orthonormé

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$



Courbure

Paramétrage quelconque en t

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|}{\|\mathbf{p}'(t)\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{\left((z''y' - y''z')^2 + (x''z' - x'z'')^2 + (y''x' - y'x'')^2\right)^{1/2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Torsion

Manière dont la courbe s'écarte du plan osculateur
La dérivée de $\mathbf{b}$ est colinéaire à $\mathbf{n}$; par définition $\mathrm{d}\mathbf{b}/\mathrm{d}s = -\tau\, \mathbf{n}$
Pour une courbe de classe C^3

$$\tau = \frac{|f' f'' f'''|}{|f' \times f''|^2}$$

← Déterminant ← Produit mixte

$$|\mathbf{abc}| = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

$$\tau = \frac{x'''(y'z'' - y''z') + y'''(x''z' - x'z'') + z'''(x'y'' - x''y')}{(y'z'' - y''z')^2 + (x'z'' - x''z')^2 + (x'y'' - x''y')^2}$$

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Polynomial curves

Bases

Base de Bernstein $B_{n,k}(t)$ au lieu de la base canonique t^k

Courbe d'approximation passant par les points de contrôle extrémaux $\mathbf{c}_k$

$$\boxed{\mathbf{p}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_k\, B_{n,k}(t)}$$

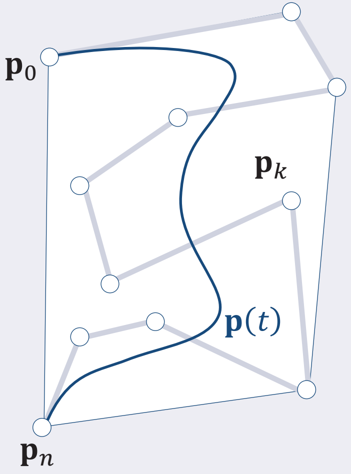
$$B_{n,k}(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$$

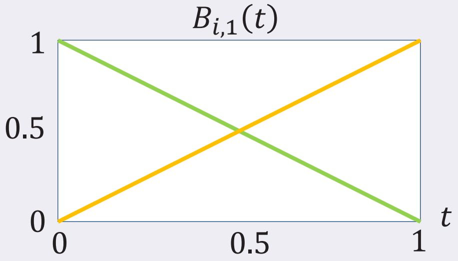
$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

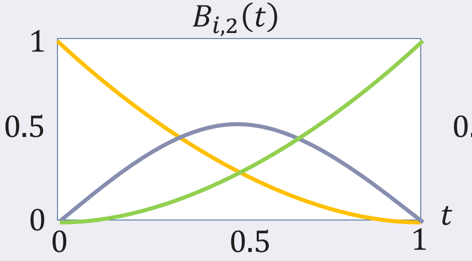
Base de Bernstein

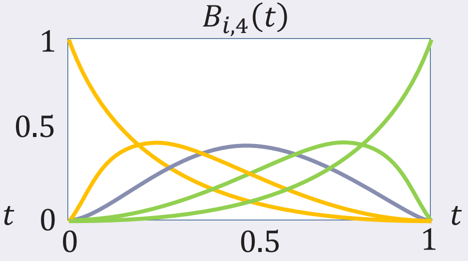
Table pré calculée

```
int binomials[5][5] = {
    { 1, 0, 0, 0, 0 },
    { 1, 1, 0, 0, 0 },
    { 1, 2, 1, 0, 0 },
    { 1, 3, 3, 1, 0 },
    { 1, 4, 6, 4, 1 };
```









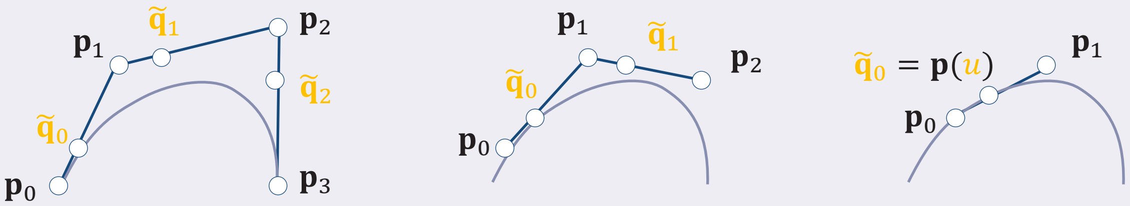
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Algorithme de De Casteljau

Construction récursive

Pour une suite $\{\mathbf{q}_k\}, k \in [0, n]$ on construit une nouvelle suite $\{\tilde{\mathbf{q}}_k\}, k \in [0, n-1]$

Points $\tilde{\mathbf{q}}_k$ obtenus par interpolation linéaire



Compute point $\mathbf{p}(u)$
    Copy $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{c}$
    For j in 1 to n
        For k in 0 to $n-j$
            $\mathbf{q}_\mathrm{k} = (1-u)\mathbf{q}_\mathrm{k} + u\mathbf{q}_\mathrm{k+1}$
    Return $\mathbf{q}_0$

Tableau $\mathbf{q}$ partiellement écrasé à chaque étape

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Dérivées

Propriétés des dérivées de la base de Bernstein $B_{n,k}$

$$B'_{n,k}(t) = n\left(B_{n-1,k-1}(t) - B_{n-1,k}(t)\right)$$

$$\mathbf{p}'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} n\, B_{n-1,k}(t)(\boldsymbol{c}_{i+1} - \boldsymbol{c}_i)$$

$$\mathbf{p}''(t) = \sum_{k=0}^{n-2} n(n-1)\, B_{n-2,k}(t)(\boldsymbol{c}_{i+2} - 2\boldsymbol{c}_{i+1} + \mathbf{c}_i)$$

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Hermite Cubiques Splines

Formulation

Courbe cubique d'interpolation
Raccords entre cubiques de classe C^1
Contraintes de position $\mathbf{p}_i$ et de tangente $\mathbf{t}_j$

$$\mathbf{p}(u) = (2u^3 - 3tu^2 + 1)\mathbf{p}_0 + (u^3 - 2u^2 + u)\mathbf{t}_0 + (2u^3 - 3u^2)\mathbf{p}_1 + (u^3 - u^2)\mathbf{t}_1$$

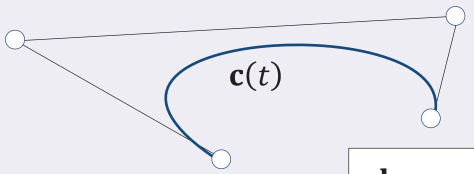
$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{p}_0 + u\mathbf{t}_0 + u^2(-3\mathbf{p}_0 - 2\mathbf{t}_0 + 3\mathbf{p}_1 - \mathbf{t}_1) + u^3(2\mathbf{p}_0 + \mathbf{t}_0 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{t}_1)$$

Problème inverse

Points de contrôle de Bézier $\mathbf{b}_k$, $k \in [0,3]$ d'une cubique $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c_0} + \mathbf{c_1}t + \mathbf{c_2}t^2 + \mathbf{c_3}t^3$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{c_0} + \mathbf{c_1}/3$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{c_0} + 2(\mathbf{c_1} + \mathbf{c_2})/3$$



$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{c}(1)$$

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{c}(0)$$

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

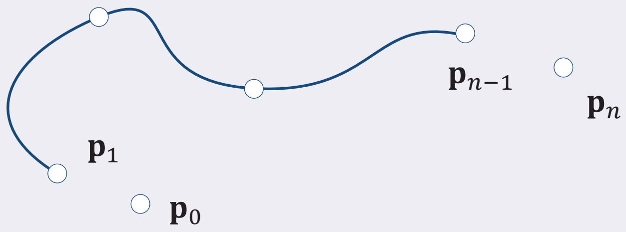
Cubiques par morceaux

Catmull–Rom Spline

Cubique par morceaux, tangente selon les points $\mathbf{p}_k$ de paramètres u_k

$$\mathbf{t}_k = \frac{\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_{k-1}}{u_{\mathrm{k}+1} - u_{\mathrm{k}-1}}$$

Simplifie en $\mathbf{t}_k = \mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_{k-1}$ si $u_{\mathrm{k}} = k$

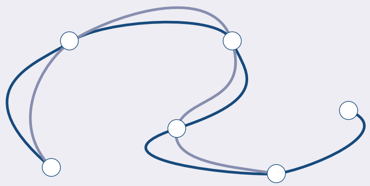


Kochanek–Bartels Spline

Cubiques, tangentes selon des paramètres de tension τ, continuité χ et biais β

$$\mathbf{t}_k = \frac{(1-\tau)(1+\beta)(1+\gamma)}{2}(\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k-1}) + \frac{(1-\tau)(1-\beta)(1-\gamma)}{2}(\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k)$$

$$\mathbf{t}_{k+1} = \frac{(1-\tau)(1+\beta)(1-\gamma)}{2}(\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k) + \frac{(1-\tau)(1-\beta)(1+\gamma)}{2}(\mathbf{p}_{k+2} - \mathbf{p}_{k+1})$$



D. Kochanek, H. Bartels. Interpolating splines with local tension, continuity, and bias control. *Proceedings of Siggraph*, 33-41, 1984.

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Cubiques

Les courbes cubiques peuvent être coûteuses [Truong 2020]
Calculer $d(\mathbf{p}, \Gamma)$ requiert la résolution d'une équation de degré 5

Appendix : calcul de $d(\mathbf{p}, \Gamma)$

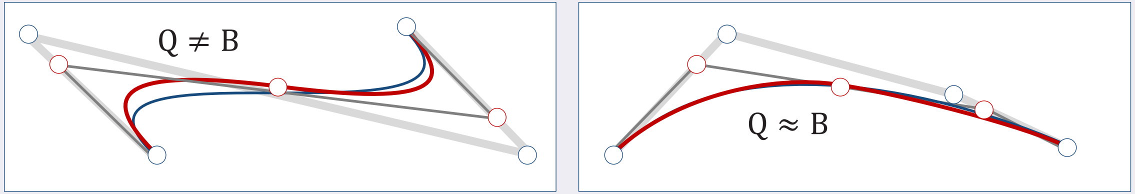
Approximation de Γ par deux quadriques Q selon un terme de contrôle γ

Par défaut, $\gamma = 1/2$

Compute $\mathbf{b}_i, i \in [0,3]$ the Bézier control points of Γ
Define the new mid control points

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{b}_0 + 3/2\,\gamma(\mathbf{c}_1 - \mathbf{b}_0)$$
$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{b}_3 - 3/2\,(1-\gamma)(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2)$$
$$\mathbf{q}_2 = (1-\gamma)\mathbf{q}_1 + \gamma\,\mathbf{q}_3$$

Two Bézier quadrics $Q(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ and $Q(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)$



N. Truong, C. Yuksel and L. Seiler. Quadratic Approximation of Cubic Curves. *ACM Computer Graphics and Interactive Techniques*, 2020.

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Définition

Intégrale de la norme de la dérivée
Pas de solution analytique si $C \in \mathbf{R}^n[t]$, $n \geq 3$
Approximation de l'intégrale par une somme

$$l = \int_0^1 \left\|\mathbf{p}'(t)\right\| \mathrm{d}t$$

Length $(\mathbf{c}, n)$
Compute $\varepsilon = 1/n$
Set $l = 0$, $t = 0$, and compute $\mathbf{q} = \mathbf{c}(t)$
For i from to $n - 1$
    Set $t \leftarrow t + \varepsilon$ and compute $\mathbf{q} = \mathbf{c}(t)$
    $l \leftarrow l + |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$
    Update $\mathbf{q} = \mathbf{p}$

Update length

Quadriques

Solution analytique : $\mathbf{p}(t) = \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_0$
Jusqu'à $25 \times$ plus rapide qu'une somme

$$l = |\mathbf{a}_2| \left[u\sqrt{u^2 + k} + k \ln\left(u + \sqrt{u^2 + k}\right) \right]_d^{1+d}$$

$$k = \frac{\mathbf{a}_2^2\ \mathbf{a}_1^2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1)^2}{4\ \mathbf{a}_2^4}$$

$$d = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1}{2\ \mathbf{a}_2^2}$$

Université Claude Bernard Lyon 1

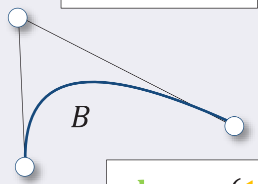
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Quadrique passant par trois points

Remarque

Une courbe de Bézier B de degré 2 ne passe pas par le point de contrôle $\mathbf{b}_1$
On définit une quadrique Q telle que $\mathbf{c}(0) = \mathbf{b}_0$, $\mathbf{c}(t) = \mathbf{b}_1$, et $\mathbf{c}(1) = \mathbf{b}_2$

$\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}(t)$



$\mathbf{b}_0 = \mathbf{c}(0)$ $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}(1)$

Deux systèmes à 3 inconnues a, b, c en x et y

Matrice T

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t^2 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$$

Vecteur des coefficient de la quadrique $at^2 + bt + c$ en x et y

Vecteur des points de passage, en x et y

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t^2 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1}{t^2-1} & \frac{1}{1-t} \\ -\frac{1+t}{t} & \frac{-1}{t^2-1} & \frac{t}{t-1} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

T^{-1} se calcule facilement

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Supplementary material

Courbe quelconque

Soit Γ d'équation $\mathbf{c}\colon [0,1] \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée
On cherche le minimum du carré de la distance soit :

$$d^2(\mathbf{p},\Gamma) = \min_{[0,1]}\big(\mathbf{p} - \mathbf{c}(t)\big)^2$$

Les extrémaux sont atteints pour les racines de $(d^2)'$, donc on cherche les racines de :

$$(d^2)' = \left(\big(\mathbf{p} - \mathbf{c}(t)\big)^2\right)' = -2\underbrace{\big(\mathbf{p} - \mathbf{c}(t)\big)}_{\circ = n} \cdot \underbrace{\mathbf{c}'(t)}_{\circ = n-1} = 0$$

Pour $\mathbf{c}$ polynomiale de degré n, il faut résoudre une équation degré $2n - 1$
Soit $R = \{r_k\}$ l'ensemble des racines de $(d^2)' = 0$

$$d^2(\mathbf{p},\Gamma) = \min_{t\,\in\, R \cap [0,1]}\big(\mathbf{p} - \mathbf{c}(t)\big)^2$$

Equivalent à $\{r_k \in [0,1]\} \cup \{0,1\}$

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Points de courbure maximale

Courbe plane

Paramétrage quelconque en t

$$\kappa(t) = \frac{\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)}{\|\mathbf{p}'(t)\|^3} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Les extrémaux sont atteintes pour les racines de $\kappa'(t)$

$° = 2(n-1)$ $° = (n-3) + (n-1)$ $° = (n-1) + (n-2)$

$$\kappa'(t) = \frac{(x'^2 + y'^2)(y'''x' - x'''y') + 3\,(x''y' - x'y'')(x'x'' + y'y'')}{(x'^2 + y'^2)^{5/2}}$$

Pour $\mathbf{p}$ de degré n, le numérateur est a priori de degré $4n - 6$
Pour une cubique, il faut (a priori) résoudre une sextique
Si $\mathbf{p}(t)$ quadrique, $n = 2$ et $y''' = x''' = 0$ et le numérateur se simplifie

$$\kappa'(t) \propto 2t\big((x_2)^2 + (y_2)^2\big) + x_2x_1 + y_2y_1$$

$$t = -\frac{(x_2x_1 + y_2y_1)}{(x_2)^2 + (y_2)^2}$$

LIRIS CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin