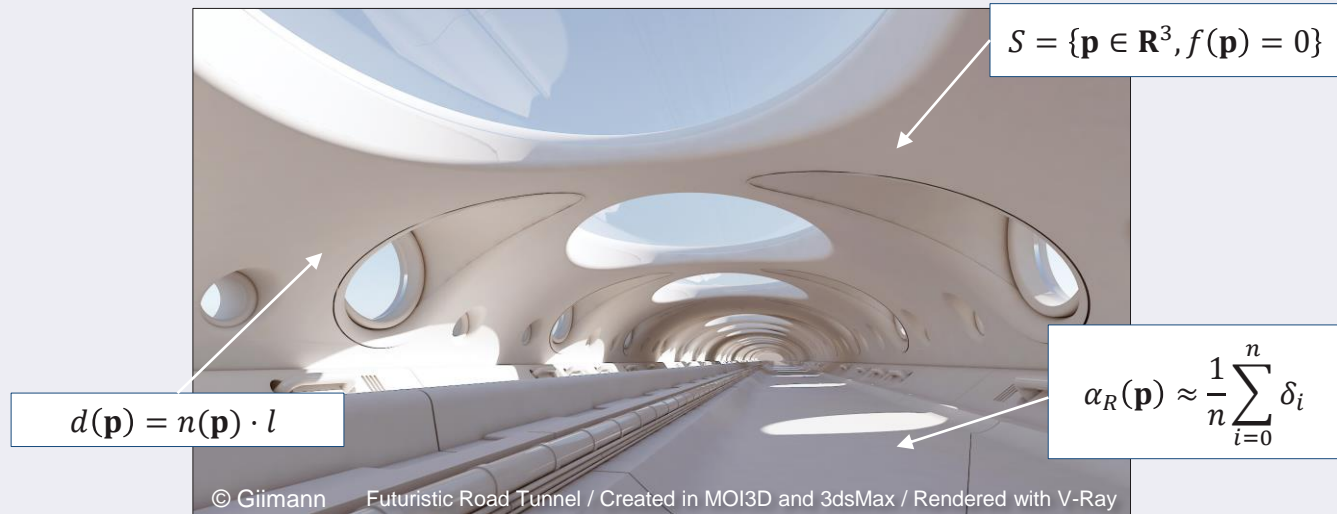


Computer Graphics

From mathematics ...



... to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Overview
Deformations
Curves
Surfaces

Computer Graphics

Fundamentals

Surfaces d'élévation

Introduction

Parametric surfaces

Bezier surfaces

Surfaces d'élévation

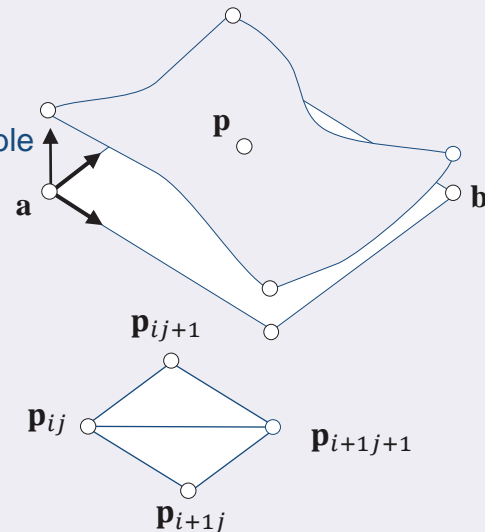
Patch de **Monge**

Equation de type $z = h(x, y)$ où $(x, y) \in [x_a, x_b] \times [y_a, y_b]$

Paramétrage équivalent sur $(u, v) \in [0, 1]^2$ par changement de variable

$$\begin{aligned}x &= x \\y &= y \\z &= h(x, y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= (1 - u)x_a + ux_b \\y &= (1 - v)y_a + vy_b \\z &= h(u, v)\end{aligned}$$



Discrétisation régulière

Génération d'un maillage de n^2 sommets et de $2(n - 1)^2$ triangles

Tableau de sommets \mathbf{v}

For $i \in [0, n - 1]$
For $j \in [0, n - 1]$
 $u = i/(n - 1)$ and $v = j/(n - 1)$
Calculate x, y , and $z = h(u, v)$
Set $\mathbf{v}[i \ n + j]$ to $\mathbf{p}_{ij} = (x, y, z)$

Géométrie G

For $i \in [0, n - 2]$
For $j \in [0, n - 2]$
Add triangles as integer triples
 $i \ n + j, (i + 1) \ n + j, (i + 1) \ n + j + 1$
 $i \ n + j, (i + 1) \ n + j + 1, i \ n + j + 1$

Topologie T



eric.galin@liris.cnrs.fr
<http://liris.cnrs.fr/~egalim>

Courbure

Introduction

Parametric surfaces

Bezier surfaces

Analyse des surfaces d'élévation

Patch de Monge $\mathbf{p}(x, y) = (x, y, h(x, y))$ où $(x, y) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$

$$\kappa = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{1 + h_x^2 + h_y^2}$$

Courbure Gaussienne

$$\mu = \frac{(1 + h_y^2)h_{xx} - 2h_xh_yh_{xy} + (1 + h_x^2)h_{yy}}{2(1 + h_x^2 + h_y^2)^{3/2}}$$

Courbure moyenne

$$\Delta h = \nabla^2 h = \nabla \cdot \nabla h = h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}$$

Laplacien

Dérivées partielles successives



eric.galin@liris.cnrs.fr
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

Surfaces de révolution

Introduction

Parametric surfaces

Bezier surfaces

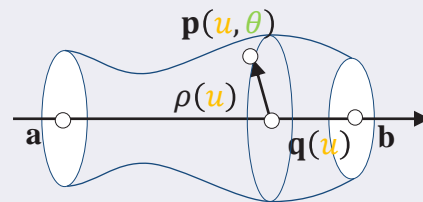
Surfaces de révolution autour d'un axe

Courbe $\Gamma: r = \rho(u)$, $u \in [0,1]$ et révolution autour d'un axe \mathbf{ab}

Paramétrage sur $(u, \theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$

$$\mathbf{q}(u) = (1-u)\mathbf{a} + u\mathbf{b}$$
$$\mathbf{p}(u, \theta) = \mathbf{q}(u) + \rho(u) (\cos \theta \mathbf{x} + \sin \theta \mathbf{y})$$

Paramétrisation rationnelle alternative



$$\frac{1-v^2}{1+v^2}\mathbf{x} + \frac{2v}{1+v^2}\mathbf{y}$$

Discretisation régulière

Génération de m sommets le long de l'axe, n points par cercle

Total de $m n$ sommets et $2(m-1)(n-1)$ triangles

For $i \in [0, m-1]$

$u = i/(n-1) \in [0,1]$

Calculate \mathbf{q}

For $j \in [0, n-1]$

Let $\theta = 2j\pi/(n-1) \in [0,2\pi]$

Set $\mathbf{v}[i n + j]$ to $\mathbf{p}(\theta)$

Géométrie G



eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egaline

Surfaces d'extrusion

Introduction

Parametric surfaces

Bezier surfaces

Extrusion

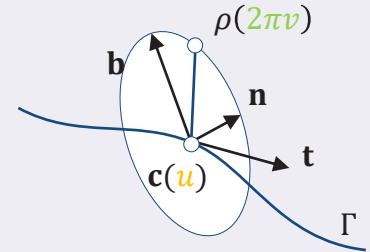
Balayage d'un contour le long d'une courbe directrice Γ d'équation $\mathbf{c} : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{c}(u) + \rho(2\pi v)(\cos 2\pi v \mathbf{n}(u) + \sin 2\pi v \mathbf{b}(u))$$

Courbe
génératrice

Equation radiale
du profil

Normale et bi
normale en $\mathbf{c}(u)$



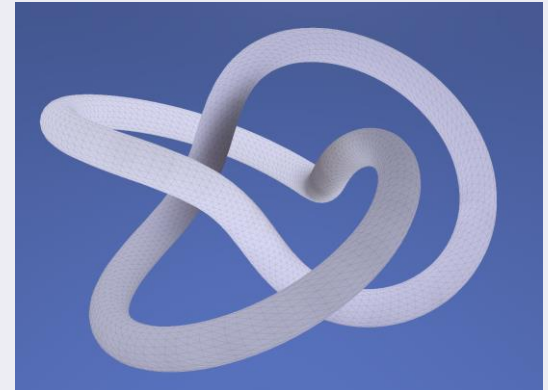
For $i \in [0, n - 1]$

For $j \in [0, p - 1]$

$u = i/(n - 1)$ and $v = j/(p - 1)$

Calculate $\mathbf{p}(u, v)$

Set $\mathbf{v}[i n + j]$ to $\mathbf{p}(u, v)$



eric.galin@liris.cnrs.fr

<http://liris.cnrs.fr/~egalain>

Computer Graphics

Tensor Product Surfaces

Surfaces de Bézier

Introduction

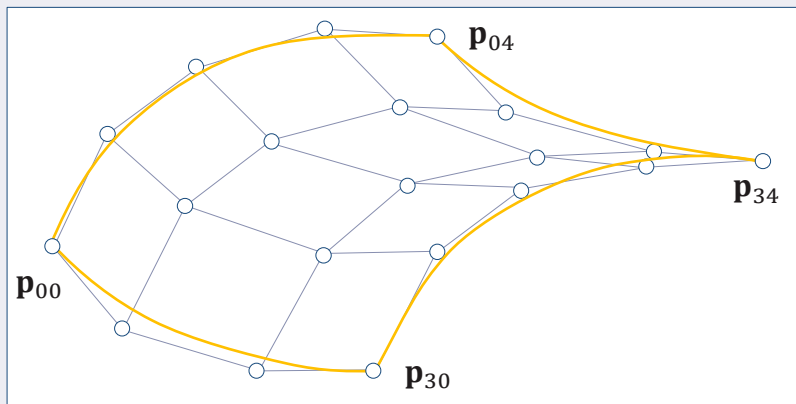
Parametric surfaces

Bézier surfaces

Carreaux

Surface produit tensoriel sur la base des polynômes de Bernstein

Points de contrôle \mathbf{p}_{ij}



Carreau de degré 3×4

$$(u, v) \in [0, 1]^2$$

$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{p}_{ij}$$

$$B_i^m(u) = C_m^i u^i (1-u)^{m-i}$$

Propriétés

Enveloppe englobante $S \subset \mathcal{C}(\mathbf{p}_{ij}) \subset B(\mathbf{p}_{ij})$

Normale

Enveloppe convexe

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v}(u, v)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u}(u, v) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n m(\mathbf{p}_{i+1j} - \mathbf{p}_{ij}) B_i^{m-1}(u) B_j^n(v)$$



eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surfaces de Bézier

Introduction

Parametric surfaces

Bezier surfaces

Discrétisation régulière

Même algorithme que pour un patch de Monge

Génération d'un maillage de n^2 sommets et de $2(n-1)^2$ triangles

Tableau de sommets \mathbf{v}

```
For  $i \in [0, n-1]$ 
  For  $j \in [0, n-1]$ 
     $u = i/(n-1)$  and  $v = j/(n-1)$ 
    Calculate  $\mathbf{p}(u, v)$ 
    Set  $\mathbf{v}[i n + j]$  to  $\mathbf{p}(u, v)$ 
```

Géométrie G

```
For  $i \in [0, n-2]$ 
  For  $j \in [0, n-2]$ 
    Add triangles as integer triples
     $i n + j, (i+1) n + j, (i+1) n + j + 1$ 
     $i n + j, (i+1) n + j + 1, i n + j + 1$ 
```

Topologie T

Discrétisation adaptative

Raffinement progressif selon la courbure



eric.galin@liris.cnrs.fr
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

Triangles de Bézier

Introduction

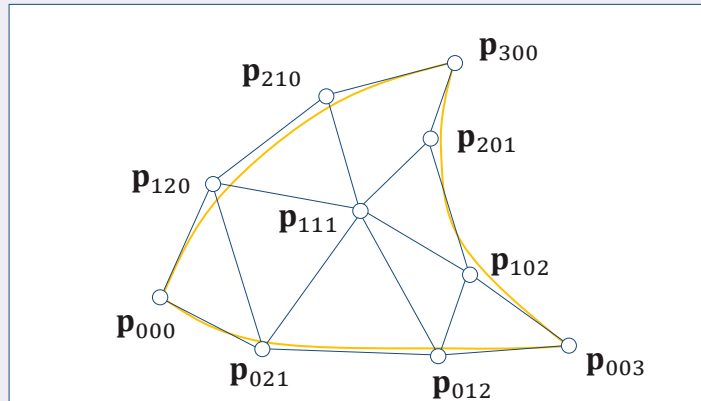
Parametric surfaces

Bezier surfaces

Patches triangulaires

Points de contrôle \mathbf{p}_{ijk}

Possibilité de passage à une forme rectangulaire dégénérée



$$(u, v, w) \geq 0 \text{ et } u + v + w = 1$$

$$\mathbf{p}(u, v, w) = \sum_{\substack{j, k \geq 0 \\ i + j + k = n}} B_{ijk}^n(u, v, w) \mathbf{p}_{ijk}$$

$$B_{ijk}^m(u, v, w) = \frac{n!}{i! j! k!} u^i v^j w^k$$

$$\begin{array}{l} u \geq 0 \\ v \geq 0 \\ w \geq 0 \\ u + v + w \leq 1 \end{array}$$



eric.galin@liris.cnrs.fr
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

Point Normal Triangles

Introduction

Parametric surfaces

Bezier surfaces

Point normal triangles

Triangles de Bézier incurvés

$$\mathbf{b}_{300} = \mathbf{p}_1$$

$$\mathbf{b}_{030} = \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{b}_{003} = \mathbf{p}_3$$

$$\mathbf{b}_{012} = \frac{1}{3}(2\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2 - \omega_{32}\mathbf{n}_3)$$

$$\mathbf{b}_{021} = \frac{1}{3}(2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \omega_{23}\mathbf{n}_2)$$

$$\mathbf{b}_{102} = \frac{1}{3}(2\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1 - \omega_{31}\mathbf{n}_3)$$

$$\mathbf{b}_{201} = \frac{1}{3}(2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 - \omega_{13}\mathbf{n}_1)$$

$$\mathbf{b}_{120} = \frac{1}{3}(2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1 - \omega_{21}\mathbf{n}_2)$$

$$\mathbf{b}_{210} = \frac{1}{3}(2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \omega_{12}\mathbf{n}_1)$$

$$\omega_{ij} = (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{n}_i$$

$$\mathbf{b}_{111} = E + \frac{1}{2}(E - V)$$

$$E = \frac{1}{6}(\mathbf{b}_{012} + \mathbf{b}_{021} + \mathbf{b}_{102} + \mathbf{b}_{201} + \mathbf{b}_{120} + \mathbf{b}_{210})$$

$$V = \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)$$



eric.galin@liris.cnrs.fr

<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

A. Vlachos, J. Peters, C. Boyd, J. Mitchell. Curved PN triangles. ACM. 159–166, 2001.