LIF11: Quelques rappels / compléments mathématiques

Emmanuel Coquery
http://liris.cnrs.fr/~ecoquery

8 septembre 2014

Ensembles - notations

- $\{a, b, c, \dots\}$
- $\{x \mid \dots\}$
- $\subset, \subseteq$
- $\cup, \cap$

Gymnastique ensembliste - 1

Soient I, J, K des ensembles. Indiquer les égalités justes parmi les suivantes :

- $(I \cap J) \cap K = I \cap (K \cap J)$
- $I \cup (J \cap K) = (I \cup J) \cap K$
- $I \cap (J \cup K) = I \cup (J \cap K)$
- $I \cap (J \cup K) = (I \cap J) \cup (J \cap K)$

Gymnastique ensembliste - 1

Soient I, J, K des ensembles. Indiquer les égalités justes parmi les suivantes :

- $(I \cap J) \cap K = I \cap (K \cap J)$
- $I \cup (J \cap K) = (I \cup J) \cap K$
- $I \cap (J \cup K) = I \cup (J \cap K)$
- $I \cap (J \cup K) = (I \cap J) \cup (J \cap K)$

Gymnastique ensembliste - 2

Soient I, J, K des ensembles. Indiquer les inclusions justes parmi les suivantes :

- $I \subseteq (J \cap I) \cup K$
- $(I \cap J) \cup (J \cap K) \subseteq J$
- $I \cap J \cap K \subseteq I \cup J \cup K$
- $I \cap J \cap K \subseteq I \cap J \cap K$

Gymnastique ensembliste - 2

Soient I, J, K des ensembles. Indiquer les inclusions justes parmi les suivantes :

- $I \subseteq (J \cap I) \cup K$
- $(I \cap J) \cup (J \cap K) \subseteq J$
- $I \cap J \cap K \subseteq I \cup J \cup K$
- $I \cap J \cap K \subseteq I \cap J \cap K$

Fonctions

Quelques notations (f fonction) :

- $f : E \to E'$
- $dom(f)$: domaine de définition
- $img(f)$: image du domaine
- $f_{|_E}$: restriction de f à E

Un peu de vocabulaire

$f : E \rightarrow E'$ peut être :

partielle $dom(f) \subseteq E$

totale $dom(f) = E$

injective si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$
f^{-1} est une fonction partielle

surjective $img(f) = E'$

bijective injective et surjective
f^{-1} est totale

Récurrence

- Objectif : démontrer une propriété
  - pour tous les entiers naturels

- Moyen :
  - Cas de base : prouver pour 0
  - Cas de récurrence : prouver que
    - si vrai pour n (hypothèse de récurrence)
    - alors vrai pour $n+1$

Rmq : Parfois il faut faire la preuve pour quelques entiers fixés en plus de 0 et du passage de n à $n+1$

Récurrence

- Objectif : démontrer une propriété
  - pour tous les entiers naturels

- Moyen :
  - Cas de base : prouver pour 0 $\leftarrow$ attention à ne pas oublier
  - Cas de récurrence : prouver que
    - si vrai pour n (hypothèse de récurrence)
    - alors vrai pour $n+1$

Rmq : Parfois il faut faire la preuve pour quelques entiers fixés en plus de 0 et du passage de n à $n+1$

Un exemple décortiqué

Theorem

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Cas de base : $n = 0$
  Il suffit de vérifier l'équation
- Cas de récurrence : On suppose que c'est vrai pour n :

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

en ajoutant $n+1$ de chaque côté :

$$n+1+\sum_{i=0}^{n} i = n+1+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Liens avec la récursivité

Intuition

Preuve par récurrence

$\leftrightarrow$

Procédure récursive de fabrication de preuve

- Même fonctionnement :
  - condition d'arrêt $\leftrightarrow$ cas de base
  - appel récursif $\leftrightarrow$ utilisation de l'hypothèse de récurrence
- pour $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$:
  preuve pour $n = 2 \rightsquigarrow$ preuve pour $n = 1 \rightsquigarrow$ preuve pour $n = 0$

Induction

- Principe similaire à la récurrence (cas de base, cas *inductif*)
- mais utilisé pour sur des *structures*
  - Le cas inductif suppose que la propriété est vraie pour les structures qui composent la structure que l'on considère
  - e.g. arbres et sous-arbres

Theorem

Un arbre binaire A à n feuilles comporte $n - 1$ nœuds internes

- Vrai si l'arbre est réduit à une feuille
- Sinon sa racine est un nœud interne et ils a deux fils A_1, A_2

A_1 a n_1 feuilles et A_2 a n_2 feuilles
Par hypothèse d'induction (car A_1 et A_2 sont des composants de A)
A_1 a $n_1 - 1$ nœuds internes
et A_2 en a $n_2 - 1$.
Nombre de noeuds internes de A :

$$\underbrace{n_1 + n_2}_{\#\text{ feuilles } A} - 1 - 1 + 1$$