Syntaxe de la logique propositionnelle

Emmanuel Coquery

7 septembre 2015

Symboles (mémo 1, def 1)

Formule =

- suite de symboles parmi :
  - $\top, \bot$
  - *connecteurs* : $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
  - *variables propositionnelles* : $p, q, r, \ldots$
  - (,)
- respectant des règles de construction

Règles de construction (mémo 1, def 1)

- une variable seule (*e.g.* p) est une formule
- $\top$ utilisé seul est une formule
- $\bot$ utilisé seul est une formule
- Si A est une formule, alors $(\neg A)$ est une formule
- Si A et B sont des formules, alors :
  - $(A \vee B)$ est une formule
  - $(A \wedge B)$ est une formule
  - $(A \Rightarrow B)$ est une formule
  - $(A \Leftrightarrow B)$ est une formule

Ces règles forment une définition *inductive*

Règles de construction (mémo 1, def 1)

- une variable seule (*e.g.* p) est une formule $\leftarrow$ atomique
- $\top$ utilisé seul est une formule $\leftarrow$ atomique
- $\bot$ utilisé seul est une formule $\leftarrow$ atomique
- Si A est une formule, alors $(\neg A)$ est une formule
- Si A et B sont des formules, alors :
  - $(A \vee B)$ est une formule
  - $(A \wedge B)$ est une formule
  - $(A \Rightarrow B)$ est une formule
  - $(A \Leftrightarrow B)$ est une formule

Ces règles forment une définition *inductive*

Structure

Construction de formule

$\leftrightarrow$

"suite d'appels récursifs à la définition"

- Correspond à la *structure* de la formule
- Formule atomique $\leftrightarrow$ non décomposable
- $(\neg A)$: fabriquée avec A
- $(A \vee B)$: fabriquée avec A et B
- $\wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ similaires

Structure

Construction de formule

$\leftrightarrow$

"suite d'appels récursifs à la définition"

- Correspond à la *structure* de la formule
- Formule atomique $\leftrightarrow$ non décomposable — cas de base
- $(\neg A)$: fabriquée avec A — cas inductif
- $(A \vee B)$: fabriquée avec A et B — cas inductif
- $\wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ similaires

Supprimer des parenthèses

- priorité (du + prioritaire au - prioritaire)
  - $\neg$
  - $\vee, \wedge$ les 2 au même niveau
  - $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ les 2 au même niveau
- Suppression des parenthèses autorisées si les priorités permettent de reconstituer la même formule :
  - $p \wedge q \Rightarrow r = ((p \wedge q) \Rightarrow r)$
  - $p \wedge q \Rightarrow r \neq (p \wedge (q \Rightarrow r))$
- Différence entre formules = structure

Arbres pour représenter la structure (mémo 1, def 4)

$ASA(A)$ = Arbre de Syntaxe Abstraite de A

- Formules atomiques $\leftrightarrow$ feuilles
- $(\neg A) \leftrightarrow$ $$\begin{array}{c} \neg \\ | \\ ASA(A) \end{array}$$
- $(A \vee B) \leftrightarrow$ $$\begin{array}{ccc} & \vee & \\ / & & \backslash \\ ASA(A) & & ASA(B) \end{array}$$
- idem pour $\wedge$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$

Définition des ASA

Définition (mémo 1, def 4)

$ASA(A)$ est un arbre dont les noeuds sont étiqueté par des connecteurs logiques ou des variables propositionnelles. Il est inductivement défini comme suit :

- Si A est atomique, alors $ASA(A)$ est une feuille étiquetée par A.
- Si $A = \neg B$, alors $ASA(A)$ est un arbre dont la racine est étiquetée par $\neg$ et qui a un seul fils : $ASA(B)$.
- Si $A = B \vee C$, alors $ASA(A)$ est un arbre dont la racine est étiquetée par $\vee$ et qui a deux fils. Le fils gauche est $ASA(B)$ et le fils droit est $ASA(C)$.
- Construction similaire pour $\wedge$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$

Sous-formule

Formule composée de formules : lesquelles ?

Définition (mémo 1, def 3)

Étant donnée une formule logique A, l'ensemble de ses *sous-formules* est donné par la fonction $sf(A)$, définie inductivement comme suit :

- Si A est atomique, $sf(A) = \{A\}$.
- Si A est de la forme $\neg B$, alors $sf(A) = \{A\} \cup sf(B)$.
- Si A est de la forme $B \vee C$, $B \wedge C$, $B \Rightarrow C$ ou $B \Leftrightarrow C$, alors $sf(A) = \{A\} \cup sf(B) \cup sf(C)$.

Rmq : $A \in sf(A)$
Rmq : $sf(A)$ correspond aux sous-arbres de $AST(A)$