Contrôle Terminal de LIF11 - Logique Classique

Date : 10 janvier 2012 - Durée : 1h
Le barème est donné à titre indicatif
Documents papier autorisés

I. Problème de logique propositionnelle (10 pts)

On souhaite démontrer le théorème suivant (on note $V(A)$ l'ensemble des variables qui apparaissent dans la formule A) :

Théorème 1 *Soit A et B deux formules. Si $A \models B$, alors il existe une formule C telle que $A \models C$, $C \models B$ et $V(C) \subseteq V(A) \cap V(B)$.*

Pour cela, on procédera comme suit :

1. Soit I un modèle d'une formule D quelconque ($I \models D$). Soit I' une interprétation telle que pour toutes les variables $p \in V(D)$, $I(p) = I'(p)$. Montrer que $I' \models D$ en utilisant une induction sur D (indice : l'hypothèse d'induction n'est pas $I' \models D$).
2. Utiliser le résultat précédent sur A et B pour montrer que si $I \models A$ alors :
   - pour tout I', si pour toutes les variables $p \in V(A)$, $I(p) = I'(p)$, alors $I' \models A$;
   - pour tout I'', si pour toutes les variables $p \in V(B)$, $I(p) = I''(p)$, alors $I'' \models B$.
3. En déduire que si $I \models A$, alors pour tout I', si pour toutes les variables $p \in V(A) \cap V(B)$, $I(p) = I'(p)$, alors $I' \models B$.
4. On pose $\{p_1, \dots, p_n\} = V(A) \cap V(B)$. Soit f la fonction booléenne à n arguments définie par :
   - $f(b_1, \dots, b_n) = v$ si il existe une interprétation I telle que $I \models A$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $I(p_k) = b_k$
   - $f(b_1, \dots, b_n) = f$ sinon

   Soit C une formule qui réalise f telle que p_i correspond à l'argument i. Montrer que $A \models C$ et $C \models B$.

II. Sémantique du calcul de prédicat (4 pts)

On considère l'alphabet suivant : symbole constante : $\{a\}$; symbole de fonction : $\{f/1, g/2\}$; symbole de prédicat : $\{p/2\}$. Soit t un terme et σ une substitution. Soit $SI = (E, I)$ une structure d'interprétation. Soit ζ une valuation (ou affectation de valeur aux variable) telle que pour toute variable x dans $dom(\sigma)$, $\zeta(x) = [\sigma(x)]_{SI,\zeta}$. Montrer par induction sur t que $[t]_{SI,\zeta} = [t\sigma]_{SI,\zeta}$

III. Du français à la formule (6 pts)

On considère l'alphabet suivant : symboles de constantes : $\{mark, phil, guitare, batterie\}$; symboles de fonctions : $\{favori/1\}$; symboles de prédicats : $\{joue/2, personne/1\}$.

On considère l'interprétation intuitive suivante : les constantes sont des personnes ou des instruments de musique ; la fonction $favori/1$ associe à chaque personne son instrument favori et une valeur spéciale aux autres objets ; le prédicat $joue/2$ est vrai si son premier argument est une personne qui joue du deuxième argument ; le prédicat $personne/1$ est vrai si l'objet est une personne.

Donner des formules logiques basées sur cet alphabet pour traduire les phrases suivantes en s'appuyant sur cette interprétation intuitive :

1. mark joue de la batterie, mais ce n'est pas son instrument favori.
2. toute personne joue de son instrument favori.
3. tous les objets qui ne sont pas des personnes ont le même objet comme favori.
4. mark et phil joue exactement des mêmes instruments, mais leur instrument favori est différent.
5. il y a une persone qui a, à la fois, la batterie et la guitare comme instruments préférés.

La dernière formule est-elle satisfiable ? Justifier brièvement.