Contrôle Terminal de LIF11 - Logique Classique

Date : 17 janvier 2013 - Durée : 1h
Le barème est donné à titre indicatif
Documents papier autorisés

I. Problème de logique propositionnelle (8 pts)

Soit un ensemble de clauses E et une clause[1] C. Soit une clause $C' \subset C$. On suppose que $C \notin E$ et $C' \notin E$. On souhaite montrer que si $E \cup \{C\}$ est insatisfiable alors $E \cup \{C'\}$ l'est.

On rappelle la définition d'arbre de résolution partiel vue en TD :

Définition 1 *Un* arbre de résolution partiel *(abrégé* ARP*) pour un ensemble de clauses E' est un arbre binaire dont les noeuds sont des clauses tel que :*
- *Les feuilles appartiennent à E'.*
- *Les noeuds internes[2] sont des résolvantes de (la racine de) leurs fils.*

On peut remarquer qu'un arbre de résolution pour une ensemble de clauses E' est un cas particulier d'ARP (sa racine est la clause vide $\square$).

Lemme 1 *Soit $\mathcal{A}_1$ un ARP pour $E \cup \{C\}$ ayant pour racine C_1 alors il existe un ARP $\mathcal{A}'_1$ pour $E \cup \{C'\}$ et une clause $C'_1 \subseteq C_1$ tels que C'_1 est racine de $\mathcal{A}'_1$.*

1. Montrer le lemme 1 par induction sur $\mathcal{A}_1$.
   (a) On remarquera que le cas de base est un arbre qui se réduit à un seul noeud, à la fois racine et feuille. On distinguera le sous-cas où cette feuille est la clause C du sous-cas où c'est un élément de E.
   (b) Pour le cas inductif, on supposera que les fils de la racine sont appelés $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$, qu'ils ont pour racine $C_2 \vee p$ et $C_3 \vee \neg p$, que la racine de $\mathcal{A}_1$ est donc $C_2 \vee C_3$ et qu'il existe C'_2, C'_3, $\mathcal{A}'_2$ et $\mathcal{A}'_3$ conformes à l'hypothèse d'induction. On distinguera alors quatre sous-cas suivant que $p \in C'_2$ ou non et que $\neg p \in C'_3$ ou non.
2. Utiliser le lemme 1 pour montrer que si $E \cup \{C\}$ est insatisfiable alors $E \cup \{C'\}$ l'est.
3. **Bonus (1 pt)** Comment ce résultat est-il utilisé dans le projet ?

II. Formule valide (6 pts)

Soit A la formule propositionnelle suivante :

$$((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \;\Rightarrow\; ((\neg q \vee \neg r) \Rightarrow \neg p)$$

1. Monter que A est valide à l'aide d'une table de vérité.
2. Montrer que le séquent $\vdash A$ est correct en utilisant le système $\mathcal{G}$[3].
3. Montrer que la formule $\neg A$ est insatisfiable en utilisant la résolution. Pour cela on exhibera dans un premier temps une formule en forme conjonctive (CNF) équivalente à A.

T.S.V.P →

1. Dans ce problème on assimile une clause à l'ensemble des littéraux qui la composent.
2. La racine est un noeud interne pour les arbres qui ne sont pas réduit à une simple feuille
3. Ne pas hésiter à tourner la copie pour disposer de la largeur suffisante

III. Du français à la formule (6 pts)

On considère l'alphabet suivant : symboles de constantes : $\{chene, sapin, plaine, montagne, arbre, lieu, autre\}$; symboles de fonctions : $type/1$; symboles de prédicats : $pousse/2$.

On considère l'interprétation intuitive suivante : les constantes *chene*, *sapin* et *erable* sont des espèces d'arbres ; les constantes *plaine* et *montagne* sont des lieux ; les constantes *arbre*, *lieu* et *autre* sont des types. La fonction $type/1$ associe à chaque objet son type. Le prédicat $pousse/2$ est vrai si sont premier argument est un arbre, son deuxième un lieu et si l'arbre pousse dans le lieu.

Donner des formules logiques basées sur cet alphabet pour traduire les phrases suivantes en s'appuyant sur cette interprétation intuitive :

1. Le chêne est un arbre et il ne pousse pas en montagne.
2. Si x pousse dans y alors x est un arbre et y est un lieu.
3. Il existe un lieu dans lequel poussent tous les arbres.
4. Il existe un objet qui a deux types différents.

Bonus (1 pt) La dernière formule est-elle satisfiable ? Justifier brièvement.

Annexe

Règles du système $\mathcal{G}$

$$(\vee_G)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee_D)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\wedge_G)\ \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge_D)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\Rightarrow_G)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow_D)\ \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg_G)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(Axiome)\ \frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$