LIFLC – Logique classique

CM1 – rappels

Licence informatique UCBL – Automne 2017–2018

https://liris.cnrs.fr/ecoquery/dokuwiki/doku.php?id=enseignement:logique:start

Dpt Informatique

Objectifs du cours

Apprendre à spécifier/modéliser un problème formellement
pour faire des programmes corrects

Comprendre comment mécaniser le raisonnement
à travers des systèmes de règles

Appréhender les techniques de preuve par induction

1. Introduction
2. Booléens
3. Ensembles
4. Ordres

Programme

1. Rappels
2. Ensembles inductifs
3. Calcul propositionnel
4. Systèmes de règles $\leftarrow$ TP
5. Termes
6. Formules du premier ordre
7. Introduction à la logique de Hoare
   et à la preuve de programme $\leftarrow$ TP

⚠ L'emploi du temps change presque toutes les semaines ⚠

Évaluation

Un contrôle intermédiaire (1/3 note UE)
le lundi 23/10/2017

Examen (2/3 note UE)
En janvier 2018

1 Introduction

2 Booléens

3 Ensembles

4 Ordres

Rappels sur les booléens

Deux valeurs :

0 (faux) et 1 (vrai)

Des opérateurs :

$\neg$ (non), $\vee$ (ou), $\wedge$ (et) et $\Rightarrow$ (implique)

x	$\neg x$
1	0
0	1

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \Rightarrow y$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Exemple d'*expression* booléenne :

$$(0 \vee 1) \wedge (1 \vee (0 \Rightarrow 1)) = \ldots$$

1 Introduction

2 Booléens

3 Ensembles

4 Ordres

Rappels sur les ensembles

Notation : $\{a, b, c, \ldots\}$ $\{x \mid \ldots\}$

Appartenance : $x \in E$

Inclusion : $E \subseteq F$

pour tout x : si $x \in E$ alors $x \in F$

Intersection : $E \cap F$

$x \in E \cap F$ si et seulement si $x \in E$ et $x \in F$

Différence : $E \setminus F$

$x \in E \setminus F$ si et seulement si $x \in E$ et $x \notin F$

Union : $E \cup F$

$x \in E \cup F$ si et seulement si $x \in E$ ou $x \in F$

Gymnastique ensembliste - 1

Soient I, J, K des ensembles. Indiquer les égalités justes parmi les suivantes :

- $(I \cap J) \cap K = I \cap (K \cap J)$
- $I \cup (J \cap K) = (I \cup J) \cap K$
- $I \cap (J \cup K) = I \cup (J \cap K)$
- $I \cap (J \cup K) = (I \cap J) \cup (J \cap K)$

Gymnastique ensembliste - 1

Soient I, J, K des ensembles. Indiquer les égalités justes parmi les suivantes :

- $(I \cap J) \cap K = I \cap (K \cap J)$
- $I \cup (J \cap K) = (I \cup J) \cap K$
- $I \cap (J \cup K) = I \cup (J \cap K)$
- $I \cap (J \cup K) = (I \cap J) \cup (J \cap K)$

Gymnastique ensembliste - 2

Soient I, J, K des ensembles. Indiquer les inclusions justes parmi les suivantes :

- $I \subseteq (J \cap I) \cup K$
- $(I \cap J) \cup (J \cap K) \subseteq J$
- $I \cap J \cap K \subseteq I \cup J \cup K$
- $I \cap J \cap K \subseteq I \cap J \cap K$

Gymnastique ensembliste - 2

Soient I, J, K des ensembles. Indiquer les inclusions justes parmi les suivantes :

- $I \subseteq (J \cap I) \cup K$
- $(I \cap J) \cup (J \cap K) \subseteq J$
- $I \cap J \cap K \subseteq I \cup J \cup K$
- $I \cap J \cap K \subseteq I \cap J \cap K$

Rappels sur les relations

n-uplet

Suite de n valeurs $x = (e_1, \dots, e_n)$

Projection :

$x[i] = e_i$

Produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_n$:

Ensemble des n-uplets $(e_1, \dots, e_n)$ tels que $e_i \in E_i$ pour $1 \leq i \leq n$

Relation R (d'*arité n*) sur $E_1 \times \dots \times E_n$:

Ensemble de n-uplets tel que $R \subseteq E_1 \times \dots \times E_n$.
Si $(e_1, \dots, e_n) \in R$, on écrit $R(e_1, \dots, e_n)$.

Rappels sur les fonctions

Fonction $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to E'$:

Relation sur $E_1 \times \cdots \times E_n \times E'$ telle que
pour chaque n-uplet $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$
il existe *au plus* 1 $(n+1)$-uplet $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$.

- s'il en existe *exactement* 1, f est *totale*
- si, pour chaque $e' \in E'$, il existe *au plus* un $(n+1)$-uplet $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$, f est *injective*
- si, pour chaque $e' \in E'$, il existe *au moins* un $(n+1)$-uplet $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$, f est *surjective*
- si f est injective et surjective alors f est *bijective*

Si f est une fonction et si $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$ alors on peut écrire $f(e_1, \ldots, e_n) = e'$

Rappels sur les fonctions

Fonction $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to E'$:

Relation sur $E_1 \times \cdots \times E_n \times E'$ telle que
pour chaque n-uplet $(e_1, \dots, e_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$
il existe *au plus* 1 $(n+1)$-uplet $(e_1, \dots, e_n, e') \in f$.

- s'il en existe *exactement* 1, f est *totale*
- si, pour chaque $e' \in E'$, il existe *au plus* un $(n+1)$-uplet $(e_1, \dots, e_n, e') \in f$, f est *injective*
- si, pour chaque $e' \in E'$, il existe *au moins* un $(n+1)$-uplet $(e_1, \dots, e_n, e') \in f$, f est *surjective*
- si f est injective et surjective alors f est *bijective*

Si f est une fonction et si $(e_1, \dots, e_n, e') \in f$ alors on peut écrire $f(e_1, \dots, e_n) = e'$

Rappels sur les fonctions

Fonction $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to E'$:

Relation sur $E_1 \times \cdots \times E_n \times E'$ telle que
pour chaque n-uplet $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$
il existe *au plus* 1 $(n+1)$-uplet $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$.

- s'il en existe *exactement* 1, f est *totale*
- si, pour chaque $e' \in E'$, il existe *au plus* un $(n+1)$-uplet $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$, f est *injective*
- si, pour chaque $e' \in E'$, il existe *au moins* un $(n+1)$-uplet $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$, f est *surjective*
- si f est injective et surjective alors f est *bijective*

Si f est une fonction et si $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$ alors on peut écrire $f(e_1, \ldots, e_n) = e'$

Rappels sur les fonctions

Fonction $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to E'$:

Relation sur $E_1 \times \cdots \times E_n \times E'$ telle que
pour chaque n-uplet $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$
il existe *au plus* 1 $(n+1)$-uplet $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$.

- s'il en existe *exactement* 1, f est *totale*
- si, pour chaque $e' \in E'$, il existe *au plus* un $(n+1)$-uplet $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$, f est *injective*
- si, pour chaque $e' \in E'$, il existe *au moins* un $(n+1)$-uplet $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$, f est *surjective*
- si f est injective et surjective alors f est *bijective*

Si f est une fonction et si $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$ alors on peut écrire $f(e_1, \ldots, e_n) = e'$

Rappels sur les fonctions

Fonction $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to E'$:

Relation sur $E_1 \times \cdots \times E_n \times E'$ telle que
pour chaque n-uplet $(e_1, \dots, e_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$
il existe *au plus* 1 $(n+1)$-uplet $(e_1, \dots, e_n, e') \in f$.

- s'il en existe *exactement* 1, f est *totale*
- si, pour chaque $e' \in E'$, il existe *au plus* un $(n+1)$-uplet $(e_1, \dots, e_n, e') \in f$, f est *injective*
- si, pour chaque $e' \in E'$, il existe *au moins* un $(n+1)$-uplet $(e_1, \dots, e_n, e') \in f$, f est *surjective*
- si f est injective et surjective alors f est *bijective*

Si f est une fonction et si $(e_1, \dots, e_n, e') \in f$ alors on peut écrire $f(e_1, \dots, e_n) = e'$

Rappels sur les fonctions

Fonction $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to E'$:

Relation sur $E_1 \times \cdots \times E_n \times E'$ telle que
pour chaque n-uplet $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$
il existe *au plus* 1 $(n+1)$-uplet $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$.

- s'il en existe *exactement* 1, f est *totale*
- si, pour chaque $e' \in E'$, il existe *au plus* un $(n+1)$-uplet $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$, f est *injective*
- si, pour chaque $e' \in E'$, il existe *au moins* un $(n+1)$-uplet $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$, f est *surjective*
- si f est injective et surjective alors f est *bijective*

Si f est une fonction et si $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$ alors on peut écrire $f(e_1, \ldots, e_n) = e'$

Rappels sur les fonctions

Fonction $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to E'$:

Relation sur $E_1 \times \cdots \times E_n \times E'$ telle que
pour chaque n-uplet $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$
il existe *au plus* 1 $(n+1)$-uplet $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$.

- s'il en existe *exactement* 1, f est *totale*
- si, pour chaque $e' \in E'$, il existe *au plus* un $(n+1)$-uplet $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$, f est *injective*
- si, pour chaque $e' \in E'$, il existe *au moins* un $(n+1)$-uplet $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$, f est *surjective*
- si f est injective et surjective alors f est *bijective*

Si f est une fonction et si $(e_1, \ldots, e_n, e') \in f$ alors on peut écrire $f(e_1, \ldots, e_n) = e'$

Exercice : définitions

Définir les notions suivantes :

- $dom(f)$: domaine de définition f
- $img(f)$: l'image du domaine de f par f (ou co-domaine)
- $f_{|E}$: la restriction (du domaine) de f à E

1 Introduction

2 Booléens

3 Ensembles

4 Ordres

Propriétés de relations binaires

R relation binaire sur E ($R \subseteq E \times E$) est :

- *symétrique* si pour tout $R(e_1, e_2)$, on a également $R(e_2, e_1)$
- *antisymétrique* si pour toute paire (e_1, e_2), si $R(e_1, e_2)$ et $R(e_2, e_1)$, alors $e_1 = e_2$
- *réflexive* si pour tout $e \in E$, on a $R(e, e)$
- *antiréflexive* si pour tout $e \in E$, on a *pas* $R(e, e)$
- *transitive* si pour tout triplet (e_1, e_2, e_3) si on a $R(e_1, e_2)$ et $R(e_2, e_3)$ alors on a $R(e_1, e_3)$.

(Pré)ordres

R est un *préordre* :

- R est *réflexive*
- R est *transitive*

R est un *ordre* :

- R est un *préordre*
- R est *antisymétrique*

R est un ordre *total* sur E

Pour tous e_1 et $e_2 \in E$, $R(e_1, e_2)$ ou $R(e_2, e_1)$

Notation : $R(e_1, e_2)$ peut se noter $e_1 \, R \, e_2$

Ordres stricts

R est un *ordre strict*

- R est *antiréflexive*
- R est *transitive*
- R est *antisymétrique*

La *partie stricte* associée à un préordre R

est la relation $R \setminus R^{-1}$

avec R^{-1} la relation $\{(e_2, e_1) \mid R(e_1, e_2)\}$

Ordres bien fondés

R est bien fondé

il n'existe pas de suite infinie $(e_i)_{i \in \mathcal{N}}$ strictement décroissante, *i.e.* telle que pour tout $i \in \mathcal{N}$, $R(e_{i+1}, e_i)$ et $e_i \neq e_{i+1}$

Composition d'ordres : ordre lexicographique

Ordre lexicographique R_{lex} sur $E_1 \times \cdots \times E_n$

On suppose un ordre R_i sur E_i pour $1 \leq i \leq n$

On a $R_{lex}((e_1, \ldots, e_n), (e'_1, \ldots, e'_n))$ ssi

- soit il existe $1 \leq i \leq n$ tel que :
  - pour tout $1 \leq j < i$, $e_j = e'_j$
  - $e_i \neq e'_i$ et $R_i(e_i, e'_i)$
- soit $(e_1, \ldots, e_n) = (e'_1, \ldots, e'_n)$

Totalité

Si R_i est total pour $1 \leq i \leq n$
alors R_{lex} est total

Bonne fondation

Si R_i est bien fondé pour $1 \leq i \leq n$
alors R_{lex} est bien fondé

Exercices

Pour chacun des ordres suivants, dire s'il est total, et s'il est bien fondé :

- Ordre naturel sur les entiers naturels $\mathcal{N}$
- Ordre naturel sur les entiers relatifs $\mathcal{Z}$
- Soit E un ensemble fini et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. On considère l'ordre d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$.
- Même question si E est infini
- L'ordre alphabétique sur les mots formé sur l'alphabet $\{a, b\}$