

LIFLC – Logique classique

CM4 – Systèmes de déduction syntaxiques

Licence informatique UCBL – Automne 2018–2019

[https://liris.cnrs.fr/ecoquery/dokuwiki/doku.php?id=enseignement:logique:
start](https://liris.cnrs.fr/ecoquery/dokuwiki/doku.php?id=enseignement:logique:start)



Raisonner sur des objets ?

Formaliser un raisonnement ?

- Formaliser le résultat d'un raisonnement
- Comment déterminer si un raisonnement a du sens
 - Formaliser les étapes du raisonnement

Jugements

Affirmations composées :

- d'un objet syntaxique :
e.g. une formule, une ensemble de formules, etc
- d'une notion de correction :
e.g. la formule est satisfiable ou valide, etc

Un jugement représente le **résultat d'un raisonnement**, on **adapte** donc cette notion au **type de raisonnement** que l'on souhaite faire

Exemple de jugement

Formules satisfiables

Objet syntaxique	une formule A
Correction	A est satisfiable

Avec *cette* notion de formule satisfiable comme jugement :

- $p \vee q$ est une **formule satisfiable** (jugement correct)
- $\neg p \wedge p$ est une **formule non satisfiable** (jugement incorrect)
- $\{p \wedge q, q \vee p\}$ n'est **pas un jugement**

Autres exemples de jugements

Il existe toute sortes de notions de jugement :

- pour représenter des conséquences logiques ($p, p \Rightarrow q \vdash q$)
- le calcul des types dans un langage ($x : int, y : int \vdash x + y : int$)
- l'évaluation d'expressions ($1 + (2 + 3) \rightsquigarrow 1 + 5$)
- etc

1 Systèmes de règles syntaxiques

2 Déduction naturelle

Calculs & raisonnements : règles syntaxiques

Pour un être humain : raisonnement/calcul =

- une suite d'étapes
- dont on est convaincu que l'on peut passer de l'une à la suivante

Pour un ordinateur : calcul =

- une suite d'étapes
- telle qu'une règle permet de passer de l'une à la suivante
 - un ordinateur n'interprète pas la signification des étapes
 - la règle de calcul est syntaxique

Pour un ordinateur, un raisonnement est un calcul

Calculs & raisonnements : règles syntaxiques

Pour un être humain : raisonnement/calcul =

- une suite d'étapes
- dont on est convaincu que l'on peut passer de l'une à la suivante

Pour un ordinateur : calcul =

- une suite d'étapes
- telle qu'une règle permet de passer de l'une à la suivante
 - un ordinateur n'interprète pas la signification des étapes
 - la règle de calcul est syntaxique

Pour un ordinateur, un raisonnement est un calcul

Calculs & raisonnements : règles syntaxiques

Pour un être humain : raisonnement/calcul =

- une suite d'étapes
- dont on est convaincu que l'on peut passer de l'une à la suivante

Pour un ordinateur : calcul =

- une suite d'étapes
- telle qu'une règle permet de passer de l'une à la suivante
 - un ordinateur n'interprète pas la signification des étapes
 - la règle de calcul est syntaxique

Pour un ordinateur, un raisonnement est un calcul

Règles

Représentation d'un calcul possible

Sous la forme

- d'un ensemble de jugements (les prémisses)
- à partir desquels on peut en déduire un autre (la conclusion)

Dans une règle on décrit la *forme* des prémisses

- la conclusion reprend certains éléments des prémisses

Notation

$$\frac{\text{prémisse}_1 \quad \dots \quad \text{prémisse}_k}{\text{conclusion}} \quad (\text{nom règle})$$

Règles

Représentation d'un calcul possible

Sous la forme

- d'un ensemble de jugements (les prémisses)
- à partir desquels on peut en déduire un autre (la conclusion)

Dans une règle on décrit la **forme** des prémisses

- la conclusion reprend certains éléments des prémisses

Notation

$$\frac{\text{prémisse}_1 \quad \dots \quad \text{prémisse}_k}{\text{conclusion}} \quad (\text{nom règle})$$

Règles

Représentation d'un calcul possible

Sous la forme

- d'un ensemble de jugements (les prémisses)
- à partir desquels on peut en déduire un autre (la conclusion)

Dans une règle on décrit la **forme** des prémisses

- la conclusion reprend certains éléments des prémisses

Notation

$$\frac{\textit{prémisse}_1 \quad \dots \quad \textit{prémisse}_k}{\textit{conclusion}} \text{ (nom règle)}$$

Axiomes

Certaines règles, les **axiomes** n'ont pas de prémisses

Notation :

$$\frac{}{\textit{conclusion}} \textit{(nom axiome)}$$

Exemple

$$\frac{A}{A \vee B} \text{ (ou}_{SAT}^1\text{)}$$

$$p \in \mathcal{V} \frac{}{p} \text{ (var)}$$

$$\frac{B}{A \vee B} \text{ (ou}_{SAT}^2\text{)}$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \text{ (et}_{SAT}\text{)}$$

Exemples de règles pour les formules satisfiables

Comment les utiliser ?

Ces règles sont-elles de *bonnes* règles ?

Exemple

$$\frac{A}{A \vee B} \text{ (ou}_{SAT}^1\text{)}$$

$$p \in \mathcal{V} \frac{}{p} \text{ (var)}$$

$$\frac{B}{A \vee B} \text{ (ou}_{SAT}^2\text{)}$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \text{ (et}_{SAT}\text{)}$$

Exemples de règles pour les formules satisfiables

Comment les utiliser ?

Ces règles sont-elles de *bonnes* règles ?

Instance d'une règle

Instance

Soit une règle

$$\frac{J_1 \quad \dots \quad J_k}{J} (R)$$

et soient j_1, \dots, j_k et j des jugements qui correspondent aux formes J_1, \dots, J_k et J alors

$$\frac{j_1 \quad \dots \quad j_k}{j}$$

est une **instance** de R

Dérivation

Definition

Une *dérivation* est un arbre :

- dont les nœuds sont des jugements
- un noeud j a pour fils j_1, \dots, j_k , si

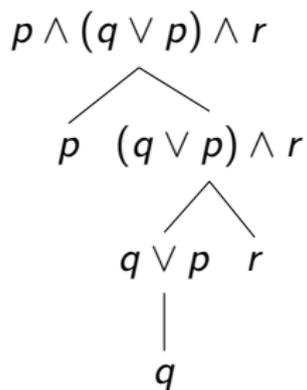
$$\frac{j_1 \quad \dots \quad j_k}{j}$$

est une instance d'une règle

La racine est appelée conclusion de la dérivation

Les feuilles correspondent à des axiomes

Exemple de dérivation



Notation utilisant les règles :

$$\frac{\frac{\frac{p}{(var)} \quad \frac{\frac{q}{(var)} \quad \frac{r}{(var)}}{q \vee p} (ou_{SAT}^1)}{(q \vee p) \wedge r} (et_{SAT})}{p \wedge (q \vee p) \wedge r} (et_{SAT})$$

Dérivations - version inductive

Definition

L'ensemble des dérivation est le plus petit ensemble défini inductivement par :

Si

- D_1, \dots, D_k sont des dérivations de conclusions j_1, \dots, j_k
- $\frac{j_1 \quad \dots \quad j_k}{j}$ est une instance d'une règle de déduction

alors

$$\frac{D_1 \quad \dots \quad D_k}{j}$$

est une dérivation de conclusion j

Jugements prouvables

Definition (Jugements prouvables)

Un jugement est **prouvable** s'il est conclusion d'une dérivation

Definition (Jugements prouvables - par induction)

L'ensemble des jugements prouvables est le plus petit ensemble de jugements stable par les règles de déduction, *i.e.* :

Si j_1, \dots, j_k sont prouvables, et si

$$\frac{j_1 \quad \dots \quad j_k}{j}$$

est une instance de règle,
alors j est prouvable.

Correction et complétude

Definition (Correction)

Un système de règles est **correct** si toute *conclusion* d'une dérivation est un *jugement correct*

Definition (Complétude)

Un système de règles est **complet** si tout *jugement correct* est *prouvable*

Illustration de la correction / complétude

Le système montré en exemple :

- est correct
- n'est pas complet (e.g. pas de négation)

Si on ajoute l'axiome :

$$\text{si } p \in \mathcal{V} \quad \frac{}{\neg p} (\neg\text{var})$$

Le système devient incorrect :

$$\frac{\frac{}{p} (\text{var}) \quad \frac{}{\neg p} (\neg\text{var})}{p \wedge \neg p} (\text{et}_{\text{SAT}})$$

Illustration de la correction / complétude

Le système montré en exemple :

- est correct
- n'est pas complet (e.g. pas de négation)

Si on ajoute l'axiome :

$$\text{si } p \in \mathcal{V} \quad \frac{}{\neg p} (\neg var)$$

Le système devient incorrect :

$$\frac{\frac{}{p} (var) \quad \frac{}{\neg p} (\neg var)}{p \wedge \neg p} (et_{SAT})$$

- 1 Systèmes de règles syntaxiques
- 2 Dédution naturelle

Retour sur les formules

Ensemble infini dénombrable \mathcal{V} de variables propositionnelles notées p, q, p', p_1, \dots

Ensemble des formules \mathcal{F}

Le plus petit ensemble stable par les règles suivantes

- Si $p \in \mathcal{V}$, p est une formule
- \perp est une formule
- Si A est une formule, alors $(\neg A)$ est une formule
- Si A et B sont des formules, alors $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$ et $(A \Rightarrow B)$ sont des formules

On étend les définitions du cours précédent en ajoutant le fait que :

- $eval(\perp, I) = 0$ (i.e. $\perp \equiv p \wedge \neg p$)

Système pour le raisonnement en logique propositionnelle

Objectif : déterminer si des formules sont

- valides
- (in)satisfiables
- conséquences logique d'un ensemble de formules

Remarques :

- A est valide si et seulement si $\emptyset \models A$
- A est insatisfiable si et seulement si $A \models \perp$

Il suffit d'avoir un système qui décide des conséquences logiques

Système pour le raisonnement en logique propositionnelle

Objectif : déterminer si des formules sont

- valides
- (in)satisfiables
- conséquences logique d'un ensemble de formules

Remarques :

- A est valide si et seulement si $\emptyset \models A$
- A est insatisfiable si et seulement si $A \models \perp$

Il suffit d'avoir un système qui décide des conséquences logiques

Séquents : jugements en déduction naturelle

Definition (Séquent)

Un séquent est de la forme

$$\Gamma \vdash A$$

où Γ est un ensemble de formules et A est une formule

$\Gamma \vdash A$ est **correct** si $\Gamma \models A$

Notations *dans les séquents* :

- $\Gamma_1, \Gamma_2 \iff \Gamma_1 \cup \Gamma_2$
- $A \iff \{A\}$

par exemple, on note Γ, A, B l'ensemble $\Gamma \cup \{A, B\}$

Règles de la déduction naturelle - 1

Axiome

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{ (ax)}$$

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} \text{ (aff)}$$

Règles pour \Rightarrow

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \text{ (}\Rightarrow\text{)}_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \text{ (}\Rightarrow\text{)}_e$$

Règles pour \neg

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \text{ (}\neg\text{)}_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \text{ (}\neg\text{)}_e$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ (}\neg\text{)}_c$$

Règles de la déduction naturelle - 2

règles pour \wedge

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} (\wedge_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} (\wedge_e^g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} (\wedge_e^d)$$

règles pour \vee

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} (\vee_i^g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} (\vee_e)$$

Exemple de dérivation en déduction naturelle

But : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\frac{p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}{\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} (\Rightarrow I)$$

Exemple de dérivation en déduction naturelle

But : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\frac{\frac{p, p \Rightarrow q \vdash q}{p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} (\Rightarrow_i)}{\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} (\Rightarrow_i)$$

Exemple de dérivation en déduction naturelle

But : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\begin{array}{c}
 \frac{p, p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow q}{p, p \Rightarrow q \vdash q} \quad \frac{p, p \Rightarrow q \vdash p}{p, p \Rightarrow q \vdash q} \quad (\Rightarrow_e) \\
 \frac{p, p \Rightarrow q \vdash q}{p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} \quad (\Rightarrow_i) \\
 \frac{p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}{\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} \quad (\Rightarrow_i)
 \end{array}$$

Exemple de dérivation en déduction naturelle

But : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow q} \text{ (ax)} \quad \frac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p} \text{ (ax)} \\
 \hline
 \frac{}{p, p \Rightarrow q \vdash q} \text{ (}\Rightarrow\text{i)} \quad \frac{}{p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} \text{ (}\Rightarrow\text{i)} \\
 \hline
 \frac{}{\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} \text{ (}\Rightarrow\text{e)}
 \end{array}$$

Exemple de dérivation en déduction naturelle

But : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow q} \text{ (ax)} \quad \frac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p} \text{ (ax)} \\
 \hline
 \frac{p, p \Rightarrow q \vdash q}{p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} \text{ (}\Rightarrow\text{i)} \quad \text{ (}\Rightarrow\text{e)} \\
 \hline
 \frac{p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}{\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} \text{ (}\Rightarrow\text{i)}
 \end{array}$$

Exemple de dérivation en déduction naturelle

But : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow q} \text{ (ax)} \quad \frac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p} \text{ (ax)} \\
 \hline
 \frac{p, p \Rightarrow q \vdash q}{p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} \text{ (}\Rightarrow\text{i)} \quad \text{ (}\Rightarrow\text{e)} \\
 \hline
 \frac{p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}{\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} \text{ (}\Rightarrow\text{i)}
 \end{array}$$

Exemple de dérivation en déduction naturelle

But : démontrer $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow q} \text{ (ax)} \quad \frac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p} \text{ (ax)} \\
 \hline
 \frac{p, p \Rightarrow q \vdash q}{p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} \text{ (}\Rightarrow\text{i)} \\
 \hline
 \frac{p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}{\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} \text{ (}\Rightarrow\text{i)}
 \end{array}
 \text{ (}\Rightarrow\text{e)}$$

Correction & complétude

Théorème

La déduction naturelle pour le calcul propositionnel est correcte et complète :

*Un séquent $\Gamma \vdash A$ est prouvable en déduction naturelle
si et seulement si
il est correct (i.e. $\Gamma \models A$)*

Démo Coq

Règles supplémentaires utilisées par Coq

Pour \Rightarrow

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash A}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash B} (\Gamma \Rightarrow)$$

Pour \neg

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow \perp}{\Gamma \vdash \neg A} (\neg \Rightarrow)$$

Pour \vee

$$\frac{\Gamma, A \vee B, A \vdash C \quad \Gamma, A \vee B, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C} (\Gamma \vee)$$

Pour \wedge

$$\frac{\Gamma, A \wedge B, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} (\Gamma \wedge)$$