LIFLC – Logique classique
Tactiques Coq et déduction naturelle

Licence informatique UCBL – Automne 2018–2019

Résumé

On montre le lien entre les tactiques Coq et les règles d'inférence de la déduction naturelle.

L'idée générale est qu'une tactique de Coq sur un but correspond à l'utilisation d'une règle de la déduction naturelle d'introduction *lue de bas en haut*, c'est-à-dire qu'on réécrit le but de Coq en un ou plusieurs autres.

Pour l'utilisation de tactiques sur les hypothèses (appelée aussi le contexte, noté Γ dans les règles) dans Coq, l'équivalence avec les règles d'élimination est un peu moins immédiate, mais on peut montrer que les règles de Coq sont correctes.

1 Règles Coq de l'axiome

Supposant qu'on a une preuve de A, nommons-la H, alors, si on cherche à prouver que A, on peut simplement donner H et terminer la preuve : c'est ce que vont faire les tactiques `assumption` ou `trivial`.

Ces tactiques correspondent directement à la règle d'inférence (ax) : comme cette règle n'a pas d'hypothèse, alors la preuve du but est terminée et Coq affiche `No more subgoals`.

```
...
H : A
____________(1/1)
A
```

```
No more subgoals.
```

Tactique `assumption`

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (ax)$$

Règle d'inférence (ax)

2 Règles Coq de l'implication

2.1 Introduction de l'implication

La tactique `intros H0 H1 ...` correspond directement à la règle $(\Rightarrow_i)$

```
...
____________(1/1)
A -> B
```

```
...
HA : A
____________(1/1)
B
```

`intros HA`

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i)$$

Règle d'inférence $(\Rightarrow_i)$

2.2 Utilisation de l'implication en hypothèse

La tactique `apply H` correspond presque à la règle ($\Rightarrow_e$). La règle de Coq n'est pas une règle de la déduction naturelle, par contre, on peut prouver que cette nouvelle règle, nommons-la ($\Gamma \Rightarrow$), est correcte, car toute preuve qui l'utilise peut être réécrite en utilisant uniquement des règles de la déduction naturelle.

```
...
H : A -> B
____________(1/1)
B
```

```
...
H : A -> B
____________(1/1)
A
```

`apply H`

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash A}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash B} \ (\Gamma \Rightarrow)$$

Règle d'inférence associée

Correction de la règle ($\Gamma \Rightarrow$).

$$\frac{\dfrac{}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B} \ (ax) \qquad \Gamma, A \Rightarrow B \vdash A}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash B} \ (\Rightarrow_e)$$

□

3 Règles Coq de la négation

En Coq, la négation n'est pas un constructeur primitif, $\neg A$ est en fait simplement un alias pour la formule (classiquement équivalente) $A \Rightarrow \bot$. On peut donc réécrire les deux formules avec les tactiques `fold` et `unfold` et ensuite utiliser les tactiques de l'implication.

```
...
____________(1/1)
~A
```

```
...
____________(1/1)
A -> False
```

`unfold not`

```
...
____________(1/1)
~A
```

```
...
HA : A
____________(1/1)
False
```

`intro HA`

4 Règles Coq de la disjonction

4.1 Introduction de la disjonction

Dans Coq, pour prouver que $A \vee B$, il faut être soit capable de prouver A, soit être capable de prouver B. On a donc une tactique pour choisir quel membre on veut prouver, ces tactiques sont `left` et `right`. Elles correspondent directement aux règles ($\vee_e^g$) et ($\vee_e^d$) lue à l'envers.

```
...
____________(1/1)
A \/ B
```

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_e^g)$$

Règle d'inférence $(\vee_e^g)$

```
...
____________(1/1)
A
```

`left`

```
...
____________(1/1)
A \/ B
```

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_e^d)$$

Règle d'inférence $(\vee_e^d)$

```
...
____________(1/1)
B
```

`right`

4.2 Destruction de disjonction en hypothèse

On utilise la tactique `destruct H` où `H` est une hypothèse de la forme $A \vee B$ qui va générer deux sous buts avec la même conclusion :

1. le premier est à prouver à partir d'un contexte où on a une preuve de A
2. le second est à prouver à partir d'un contexte où on a une preuve de B

On peut utiliser `destruct H as [HA | HB]` si on veut nommer les nouvelles hypothèses.

La règle d'inférence utilisée par Coq réécrit le contexte courant Γ. Ce n'est pas une règle de la déduction naturelle, mais elle est assez directe à prouver.

```
...
H : A /\ B
____________(1/1)
C
```

```
...
H : A \/ B
HA : A
____________(1/2)
C
____________(2/2)
C
```

```
...
H : A \/ B
HB : B
____________(2/2)
C
```

`destruct H as [HA | HB]`

$$\frac{\Gamma, A \vee B, A \vdash C \quad \Gamma, A \vee B, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ (\Gamma\vee)$$

Règle d'inférence associée

Correction de la règle $(\Gamma\vee)$.

$$\frac{\dfrac{}{\Gamma, A \vee B \vdash A \vee B}\ (ax) \quad \Gamma, A \vee B, A \vdash C \quad \Gamma, A \vee B, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ (\vee_e)$$

$\square$

5 Règles Coq de la conjonction

5.1 Introduction de la conjonction

On utilise la tactique `split` sur le but $A \wedge B$ qui va générer deux sous buts avec les mêmes hypothèses que celles de départ :

1. dans le premier il faut prouver que A
2. dans le second il faut prouver que B

```
...
____________(1/1)
A /\ B
```

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} (\wedge_i)$$

Règle d'inférence $(\wedge_i)$

```
...
____________(1/2)
A
____________(2/2)
B
```

`split`

5.2 Destruction de conjonction en hypothèse

On utilise la tactique `destruct H` où `H` est une hypothèse de la forme $A \wedge B$ qui va générer un seul sous but, mais où le contexte contient désormais une preuve de A et une preuve de B. La tactique `destruct` a le même effet que `elim; intros`.

On peut utiliser `destruct H as [HA HB]` si on veut nommer les nouvelles hypothèses. Similairement, on montre que la règle d'inférence de Coq, nommons-la $(\Gamma\wedge)$, peut être obtenue par la déduction naturelle. Ici la preuve de la règle $(\Gamma\wedge)$ est un peu moins directe.

```
...
H : A /\ B
____________(1/1)
C
```

$$\frac{\Gamma, A \wedge B, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} (\Gamma\wedge)$$

Règle d'inférence associée

```
...
H : A /\ B
HA : A
HB : B
____________(1/1)
C
```

`destruct H as [HA HB]`

Correction de la règle $(\Gamma\wedge_i)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \wedge B, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B, A \vdash B \Rightarrow C} (\Rightarrow_i)}{\Gamma, A \wedge B \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow C} (\Rightarrow_i) \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \wedge B \vdash A \wedge B} (ax)}{\Gamma, A \wedge B \vdash A} (\wedge_e^g)}{\Gamma, A \wedge B \vdash B \Rightarrow C} (\Rightarrow_e) \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \wedge B \vdash A \wedge B} (ax)}{\Gamma, A \wedge B \vdash B} (\wedge_e^d)}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} (\Rightarrow_e)$$

$\square$