LIFLC – Logique classique
TD1 – Rappels

Licence informatique UCBL – Automne 2018–2019

Les (parties d') exercices notés avec † sont plus difficiles.

Exercice 1 : Définitions ensemblistes autour des fonctions

Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to E'$. À partir de la définition ensembliste d'une fonction, définir les notions suivantes :

— $dom(f)$: domaine de définition d'une fonction (partielle) f

— $img(f)$: l'image du domaine de f par f (ou co-domaine)

— $f_{|E}$: la restriction (du domaine) de f à E

Exercice 2 : Ordre, totalité et bonne fondation

Pour chacun des ensembles ordonnés suivants, dire s'il est total et/ou bien fondé. Prouver ces affirmations.

1. Les entiers naturels sans zéro ordonnés selon la relation *divise* suivante : $n_1 \leq_{div} n_2$ si n_1 est un diviseur de n_2, (*i.e.* il existe un entier naturel $n'_{12} \neq 0$ tel que $n_1 n'_{12} = n_2$). On commencera par montrer que $\leq_{div}$ est un ordre.
2. Les parties d'un ensemble fini E, ordonnées par inclusion. On commencera par montrer que $\subseteq$ est un ordre.
3. † Les parties d'un ensemble infini E, ordonnées par inclusion.
4. † Les chaînes de caractères (de taille finie mais non bornée) construites sur l'alphabet $\{a, b\}$ ordonnées par ordre alphabétique (*e.g.* $a < aa < ab$). On rappelle que l'ordre alphabétique sur les mots peut être défini comme suit :
   — Si m_1 est un préfixe de m_2, alors $m_1 \leq m_2$
   — Si m_1 n'est pas préfixe de m_2 et si m_2 n'est pas préfixe de m_1, alors il existe une plus petite position p telle que $m_1[p] \neq m_2[p]$. Dans ce cas, si $m_1[p] <_{\{a,b\}} m_2[p]$, alors $m_1 \leq m_2$, sinon $m_1[p] >_{\{a,b\}} m_2[p]$ et $m_2 \leq m_1$

Exercice 3 : Composition d'ordres totaux et/ou bien fondés †

On considère un ordre $\leq_1$ sur E_1 et un ordre $\leq_2$ sur E_2. Soit $<_1$ (resp. $<_2$) la partie stricte associée à $\leq_1$ (resp. $\leq_2$). On définit $\leq_{lex}$ sur $E_1 \times E_2$ par : $(e_1, e_2) \leq_{lex} (e'_1, e'_2)$ si et seulement si :

— soit $e_1 < e'_1$

— soit $e_1 = e'_1$ et $e_2 < e'_2$

— soit $(e_1, e_2) = (e'_1, e'_2)$

1. Montrer que $\leq_{lex}$ est un ordre.
2. Montrer que si $\leq_1$ et $\leq_2$ sont totaux, alors $\leq_{lex}$ est total.
3. Montrer que si $\leq_1$ et $\leq_2$ sont bien fondés, alors $\leq_{lex}$ est bien fondé.

Corrections

Solution de l'exercice 1

— $dom(f) = \{(e_1, \dots, e_n) \mid \text{ il existe } e' \text{ tel que } (e_1, \dots, e_n, e') \in f\}$
ou bien $dom(f) = \{(t[1], \dots, t[n]) \mid t \in f\}$
ou encore $dom(f) = \{(e_1, \dots, e_n) \mid \text{ il existe } e' \text{ tel que } f(e_1, \dots, e_n) = e'\}$ en utilisant la notation $f(e_1, \dots, e_n) = e' \equiv (e_1, \dots, e_n, e') \in f$

— $img(f) = \{t[n+1] \mid t \in f\}$
ou $img(f) = \{e' \mid \text{ il existe } (e_1, \dots, e_n) \text{ tel que } f(e_1, \dots, e_n) = e'\}$

— $f_{|E} = \{t \mid t \in f \text{ et } (t[1], \dots, t[n]) \in E\}$
ou en utilisant la définition de l'intersection $f_{|E} = f \cap (E \times E')$

Solution de l'exercice 2

De façon usuelle (et un peu plus concise), on peut noter $|$ pour $\leq_{div}$

1. **$\leq_{div}$ est un ordre** Soit 3 entiers n_1, n_2 et n_3 tels que $n_1 \leq_{div} n_2$ et $n_2 \leq_{div} n_3$. Il existe donc n'_{12} tel que $n_1 n'_{12} = n_2$ et n'_{23} tel que $n_2 n'_{23} = n_3$. Donc $n_1(n'_{12}n'_{23}) = n_3$, donc $n_1 \leq_{div} n_3$. Donc $\leq_{div}$ est transitif. $\leq_{div}$ est réflexif (tout entier est divisible par lui-même). Soient n_1 et n_2 tels que $n_1 \leq_{div} n_2$ et $n_2 \leq_{div} n_1$. Il existe n'_{12} et n'_{21} tels que $n_1 n'_{12} = n_2$ et $n_2 n'_{21} = n_1$. On a $n_1 n'_{12} n'_{21} = n_1$. Comme n'_{12} et n'_{21} sont des entiers non nuls, on en déduit que $n'_{12} = n'_{21} = 1$, et dont que $n_1 = n_2$. Donc $\leq_{div}$ est antisymétrique. $\leq_{div}$ est donc un ordre.

   Totalité $\leq_{div}$ n'est pas total : 2 et 3 ne sont pas comparables

   Bonne fondation $\leq_{div}$ est bien fondé. On peut remarquer que si $n_1 <_{div} n_2$ alors $n_1 < n_2$. S'il existe une séquence infinie $S = (n_i)_{i \in \mathcal{N}}$ telle que $n_{i+1} <_{div} n_i$ pour tout $i \in \mathcal{N}$, alors on a $n_{i+1} < n_i$ pour tout $i \in \mathcal{N}$. S serait donc une séquence infinie d'entiers naturels strictement décroissante selon $<$. Or $<$ est un ordre bien fondé sur les entiers naturels, qui n'admet donc pas de séquence infinie strictement décroissante. Donc il n'existe pas de telle séquence S, donc $<_{div}$ est bien fondé.

2. **$\subseteq$ est un ordre** $\subseteq$ est transitif et réflexif. De plus, si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$, alors $A = B$, donc $\subseteq$ est un ordre.

   Totalité Considérons $E = \{0, 1\}$. Alors $\{0\} \in \mathcal{P}(E)$ et $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$, mais $\{0\}$ et $\{1\}$ ne sont pas comparables, donc $\subseteq$ n'est pas total sur $\mathcal{P}(E)$.

   Bonne fondation Comme $\mathcal{P}(E)$ est fini, toute séquence infinie S d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ contient au moins deux[1] occurrences d'un même élément E' de $\mathcal{P}(E)$. Si cette séquence est strictement décroissante, cela signifie que $E' \subset E'$, ce qui est impossible. Donc $\subseteq$ est bien fondé sur $\mathcal{P}(E)$.
   Alternativement, on peut utiliser l'argument que si on a une séquence infinie $E_0 \supsetneq E_1 \supsetneq E_2 \dots$, alors la séquence des cardinalités $|E_0| > |E_1| > |E_2| \dots$ l'est aussi : une contradiction car l'ordre sur $\mathcal{N}$est bien fondé.

3. **Totalité** *c.f.* ci-dessus

   Bonne fondation Soit une séquence infinie $(e_i)_{i \in \mathcal{N}}$ d'éléments de E tous distincts les uns des autres. Soit la séquence $(E_i)_{i \in \mathcal{N}}$ définie par $E_0 = E$ et pour $i \in \mathcal{N}$, $E_{i+1} = E_i \setminus \{e_i\}$. Comme tous les e_i sont distincts les uns des autres, $e_i \in E_i$. Donc $E_{i+1} \subset E_i$. Donc $(E_i)_{i \in \mathcal{N}}$ est une séquence infinie strictement décroissante, et donc $\subseteq$ n'est pas bien fondé pour $\mathcal{P}(E)$.

1. en fait une infinité

4. **Totalité** Soit deux chaînes de caractères m_1 et m_2. Si m_1 est un préfixe de m_2 alors $m_1 \leq m_2$. Inversement si m_2 est un préfixe de m_1 alors $m_2 \leq m_1$. Dans les autres cas, il existe au moins une position p telle que $m_1[p] \neq m_2[p]$. Soit p la plus petite de ces positions. Si $m_1[p] = a$ et $m_2[p] = b$ alors $m_1 < m_2$, sinon $m_1[p] = b$ et $m_2[p] = a$ et $m_1 > m_2$. Donc m_1 et m_2 sont toujours comparables. Donc l'ordre alphabétique est total.

   Bonne fondation On considère la séquence infinie $S = (m_i)_{i \in \mathcal{N}}$ de chaînes de caractères définie par $m_0 = b$ et $m_{i+1} = am_i$ (*i.e.* $m_0 = b$, $m_1 = ab$, $m_2 = aab$, $m_3 = aaab$, *etc.*). On peut remarquer que $m_{i+1} < m_i$. On a donc une séquence infinie décroissante, donc l'ordre alphabétique sur les chaînes de caractères sur l'alphabet $\{a, b\}$ n'est pas bien fondé.

Solution de l'exercice 3

1. Supposons $(e_1, e_2) \leq_{lex} (e_1', e_2')$ et $(e_1', e_2') \leq_{lex} (e_1'', e_2'')$.
   - Si $(e_1, e_2) = (e_1', e_2')$ ou $(e_1', e_2') = (e_1'', e_2'')$ alors on a bien $(e_1, e_2) \leq_{lex} (e_1'', e_2'')$.
   - Sinon,si $e_1 <_1 e_1'$ et $e_1' \leq_1 e_1''$, alors $e_1 <_1 e_1''$ et donc $(e_1, e_2) \leq_{lex} (e_1'', e_2'')$.
   - Sinon, si $e_1 = e_1'$, alors :
     - Si $e_1' <_1 e_1''$, alors $e_1 <_1 e_1''$ et donc $(e_1, e_2) \leq_{lex} (e_1'', e_2'')$.
     - sinon, $e_1 = e_1' = e_1''$ et $e_2 <_2 e_2'$ ou $e_2' <_2 e_2''$, donc $e_2 <_2 e_2''$ et donc $(e_1, e_2) \leq_{lex} (e_1'', e_2'')$.

   Donc $\leq_{lex}$ est transitive. Par la dernière règle de sa définition, elle est également réflexive. Si $(e_1, e_2) \leq_{lex} (e_1', e_2')$ et $(e_1', e_2') \leq_{lex} (e_1, e_2)$, alors on a nécessairement $e_1 \leq_1 e_1'$ et $e_1' \leq_1 e_1$, *i.e.* $e_1 = e_1'$. Cela signifie que $e_2 \leq_2 e_2'$ et $e_2' \leq_2 e_2$, d'où $e_2 = e_2'$ et donc $(e_1, e_2) = (e_1', e_2')$. Donc $\leq_{lex}$ est antisymétrique, donc c'est un ordre.
2. On suppose que $\leq_1$ et $\leq_2$ sont totaux. Considérons (e_1, e_2) et (e_1', e_2') quelconques. Comme $\leq_1$ est total :
   - Soit $e_1 <_1 e_1'$. Alors $(e_1, e_2) \leq_{lex} (e_1', e_2')$
   - Soit $e_1' <_1 e_1$. Alors $(e_1', e_2') \leq_{lex} (e_1, e_2)$
   - Soit $e_1 = e_1'$. Comme $\leq_2$ est total :
     - Soit $e_2 <_2 e_2'$. Alors $(e_1, e_2) \leq_{lex} (e_1', e_2')$
     - Soit $e_2' <_2 e_2$. Alors $(e_1', e_2') \leq_{lex} (e_1, e_2)$
     - soit $e_2 = e_2'$. Aloes $(e_1, e_2) \leq_{lex} (e_1', e_2')$
3. On remarque que si $(e_1, e_2) <_{lex} (e_1', e_2')$ alors soit $e_1 <_1 e_1'$, soit $e_1 = e_1'$ et $e_2' <_2 e_2'$ On considère une séquence $S = ((e_1^i, e_2^i))_{i \in \mathcal{N}}$ infinie strictement décroissante. On peut remarquer que pour tout $i \in \mathcal{N}$, $e_1^{i+1} \leq_1 e^i$. Comme $\leq_1$ est bien fondé, il n'admet pas de séquence infinie strictement décroissante, donc il existe un rang k tel que pour tout $i \geq k$, $e_1^i = e_A^{i+1}$. Soit $S' = ((e_1^{i+k}, e_2^{i+k}))_{i \in \mathcal{N}}$. Comme S' est un suffixe de S, elle est également infinie et strictement décroissante. Or dans S', tous les éléments sont égaux sur leur première projection, donc cela signifie que pour tout $i \in \mathcal{N}$ $e_2^{i+k+1} < e_2^{i+k}$, ce qui est impossible car $\leq_2$ est bien fondé. Donc $\leq_{lex}$ n'admet pas de séquence infinie strictement décroissante, donc $\leq_{lex}$ est bien fondé.