LIFLC – Logique classique
TD4 – Déduction naturelle

Licence informatique UCBL – Automne 2018–2019

Les (parties d') exercices noté(e)s avec † sont plus difficiles.

Exercice 1 : Dérivation en déduction naturelle

Donner une dérivation en déduction naturelle des séquents suivants :

1. $(p \vee q) \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$
2. $\vdash (p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
3. $\vdash \neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$

Exercice 2 : Correction de la déduction naturelle

1. On considère des règles $(\Rightarrow_i)$ et $(\Rightarrow_e)$ de la déduction naturelle. Montrer que pour toute instance de ces règles, si l'ensemble des prémisses sont correctes, alors la conclusion l'est.
2. On suppose à présent que toutes les règles de la déduction naturelle sont correctes.
   a. Énoncer la définition d'ensemble inductif des séquents prouvables en déduction naturelle en spécialisant la définition d'ensemble des jugements prouvables donnée en cours.
   b. Montrer par induction sur l'ensemble des séquents prouvables la correction de la déduction naturelle : *si un séquent $\Gamma \vdash A$ est prouvable, alors il est correct (i.e. $\Gamma \models A$)*

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (ax)$$

Axiome

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ (aff)$$

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

Règles pour $\Rightarrow$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\neg_c)$$

Règles pour $\neg$ et $\bot$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_e^d)$$

Règles pour $\wedge$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^d) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

Règles pour $\vee$

FIGURE 1 – Règles de la déduction naturelle

Corrections

Solution de l'exercice 1

1.

$$
\dfrac{\dfrac{}{(p \vee q) \Rightarrow r, p \vdash (p \vee q) \Rightarrow r}\,(ax) \quad \dfrac{\dfrac{}{(p \vee q) \Rightarrow r, p \vdash p}\,(ax)}{(p \vee q) \Rightarrow r, p \vdash p \vee q}\,(\vee_i^g)}{\dfrac{(p \vee q) \Rightarrow r, p \vdash r}{(p \vee q) \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r}\,(\Rightarrow_i)}\,(\Rightarrow_e)
$$

Pour faire un parallèle en Coq, le script de preuve :

```
Section TD4.

Variable p q r : Prop.
Variable H: p \/ q -> r.

Goal p -> r.
Proof.
intro H1.
apply H.
left.
assumption.

Restart.
exact (fun x => H (or_introl x)).
Qed.

End TD4.
```

2.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \Rightarrow q \wedge r, p \vdash p \Rightarrow q \wedge r}\,(ax) \quad \dfrac{}{p \Rightarrow q \wedge r, p \vdash p}\,(ax)}{p \Rightarrow q \wedge r, p \vdash q \wedge r}\,(\Rightarrow_e)}{p \Rightarrow q \wedge r, p \vdash q}\,(\wedge_e^g)}{p \Rightarrow q \wedge r \vdash p \Rightarrow q}\,(\Rightarrow_i)}{\vdash (p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)}\,(\Rightarrow_i)
$$

3.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(p \vee q), p \vdash p}\,(ax)}{\neg(p \vee q), p \vdash p \vee q}\,(\vee_i^g) \quad \dfrac{}{\neg(p \vee q), p \vdash \neg(p \vee q)}\,(ax)}{\neg(p \vee q), p \vdash \bot}\,(\neg_e)}{\neg(p \vee q) \vdash p \Rightarrow \bot}\,(\Rightarrow_i)}{\neg(p \vee q) \vdash \neg p}\,(\neg_i) \quad \begin{array}{c} D \\ \vdots \\ \neg(p \vee q) \vdash \neg q \end{array}}{\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q}\,(\wedge_i)}{\vdash \neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q}\,(\Rightarrow_i)
$$

où

$$D = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(p \vee q), q \vdash q}\,(ax)}{\neg(p \vee q), q \vdash p \vee q}\,(\vee_i^d) \qquad \dfrac{}{\neg(p \vee q), q \vdash \neg(p \vee q)}\,(ax)}{\neg(p \vee q), q \vdash \bot}\,(\neg_e)}{\neg(p \vee q) \vdash q \Rightarrow \bot}\,(\Rightarrow_i)}{\neg(p \vee q) \vdash \neg q}\,(\neg_i)$$

Solution de l'exercice 2

1. **Règle** $(\Rightarrow_i)$ On suppose que $\Gamma, A \vdash B$ est correct et on veut montrer que $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ l'est. Soit I un modèle de Γ noté $I \models \Gamma$, c'est-à-dire une interprétation I telle que pour toute formule $A' \in \Gamma$, $I \models A'$. On procède par cas sur la valeur de $eval(A, I)$:

   — si $eval(A, I) = 0$, alors $eval(A \Rightarrow B, I) = 1$

   — sinon, $eval(A, I) = 1$. On a donc $I \models A'$ pour tout $A' \in \Gamma \cup \{A\}$. Comme $\Gamma, A \vdash B$ est correct, on a $\Gamma, A \models B$ et donc $eval(B, I) = 1$. Donc $eval(A \Rightarrow B, I) = 1$

   Dans les deux cas, $I \models A \Rightarrow B$, donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, donc $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ est correct.

   Règle $(\Rightarrow_e)$ On suppose que $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ et $\Gamma \vdash A$ sont corrects et on veut montrer que $\Gamma \vdash B$ l'est. Soit I une interprétation telle que pour toute formule $A' \in \Gamma$, $I \models A'$. Comme $\Gamma \vdash A$ est correct, on a $\Gamma \models A$ et donc $I \models A$, *i.e.* $eval(A, I) = 1$. De même, comme $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ est correct, on a $\Gamma \models A \Rightarrow B$ et donc $I \models A \Rightarrow B$, *i.e.* $eval(A \Rightarrow B, I) = 1$. Comme $eval(A, I) = 1$ et $eval(A \Rightarrow B, I) = 1$, on en déduit $eval(B, I) = 1$. Donc $\Gamma \models B$ et $\Gamma \vdash B$ est correct.

2. a. L'ensemble des séquents prouvables par la déduction naturelle est le plus petit ensemble tel que :

   — si $\Gamma_1 \vdash A_1, \dots, \Gamma_n \vdash A_n$ sont prouvables en déduction naturelle

   — et si

   $$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1, \dots, \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}$$

   est une instance d'une règle de la déduction naturelle

   alors $\Gamma \vdash A$ est prouvable en déduction naturelle.

   b. Par induction sur les séquents prouvables en déduction naturelle. Soient $\Gamma_1 \vdash A_1, \dots, \Gamma_n \vdash A_n$ des séquents prouvables en déduction naturelle. Par hypothèse d'induction $\Gamma_1 \vdash A_1, \dots, \Gamma_n \vdash A_n$ sont corrects. Soit

   $$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1, \dots, \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}$$

   une instance d'une règle de la déduction naturelle. Comme cette règle est correcte, on en déduit que $\Gamma \vdash A$ est correct.

   Remarque : on est ici dans un cas particulier où on a l'impression de ne pas avoir de cas de base. Il ne faut pas oublier la règle (ax) qui n'a pas de prémisse et qui sert donc de cas de base, même si elle est traitée ici comme les autres règles.