LIFLC – Logique classique
TD6 – Logique du premier ordre

Licence informatique UCBL – Automne 2018–2019

Les (parties d') exercices noté(e)s avec † sont plus difficiles.

Exercice 1 : Syntaxe des formules

On considère la signature suivante :

— Symboles de fonction : $f/2$, $g/1$

— Constantes : a, b

— Symboles de prédicats : $p/1$, $q/2$

On considère les suites des symboles suivantes :

— $g(f(x, y)) \vee p(a)$

— $\exists x\ q(a, y) \wedge p(f(a, b)) \Rightarrow p(x)$

— $\forall x \exists y\ p(x) \wedge q(f(y, b))$

— $p(g(z)) \vee \forall x \exists z\ q(a, y)$

— $\exists x\ q(f(x, y), g(z))$

— $\forall y \forall x\ q(x, y)$

1. Quelles sont les suites de symboles qui ne sont pas des formules ?
2. Donner l'ensemble des variables libres de chaque formule. Donner également leur fermetures universelles et existentielles.

Exercice 2 : Du français aux formules

On considère la signature :

— Constantes : `titi`, `sylvestre`, `tom`, `jerry`, `spike`

— Symboles de prédicats : `souris/1`, `canari/1`, `chat/1`, `chien/1`, `chasse/2`.

Donner des formules exprimant chacune des propriétés ci-dessous (une proie est un individu qui est chassé par un autre, un prédateur est un individu qui en chasse un autre) :

— Titi a un prédateur.

— Les chats qui chassent les canaris ne chassent pas les souris.

— Spike est un prédateur d'un prédateur de Jerry.

— x est une proie mais pas un prédateur.

— x a un prédateur unique.

— x n'est chassé par personne.

— Tous les chasseurs sont des proies.

— Tous les chats sont chasseurs et proies.

— Sylvestre et Tom ne chassent pas les mêmes proies.

Exercice 3 : Interprétations

On considère la signature :

- Constantes : $\mathtt{r}$, $\mathtt{b}$, $\mathtt{j}$
- Symboles de fonction : $\mathtt{suiv}/1, \mathtt{prec}/1$
- Symboles de prédicat : $\mathtt{compose}/3, \mathtt{opposes}/2$

l'interprétation I :

- Univers : $\mathcal{U} = \{\mathit{Jaune}, \mathit{Rouge}, \mathit{Orange}, \mathit{Bleu}, \mathit{Vert}, \mathit{Violet}, \mathit{Noir}, \mathit{Blanc}\}$
- Interprétation des symboles :
  - $I(\mathtt{r}) = \mathit{Rouge}$, $I(\mathtt{b}) = \mathit{Bleu}$, $I(\mathtt{j}) = \mathit{Jaune}$
  - $I(\mathtt{suiv}) = \mathit{Rouge} \mapsto \mathit{Orange}, \mathit{Orange} \mapsto \mathit{Jaune}, \mathit{Jaune} \mapsto \mathit{Vert}, \mathit{Vert} \mapsto \mathit{Bleu}, \mathit{Bleu} \mapsto \mathit{Violet}, \mathit{Violet} \mapsto \mathit{Rouge}, \mathit{Noir} \mapsto \mathit{Blanc}, \mathit{Blanc} \mapsto \mathit{Noir}$
  - $I(\mathtt{prec}) = \mathit{Orange} \mapsto \mathit{Rouge}, \mathit{Jaune} \mapsto \mathit{Orange}, \mathit{Vert} \mapsto \mathit{Jaune}, \mathit{Bleu} \mapsto \mathit{Vert}, \mathit{Violet} \mapsto \mathit{Bleu}, \mathit{Rouge} \mapsto \mathit{Violet}, \mathit{Blanc} \mapsto \mathit{Noir}, \mathit{Noir} \mapsto \mathit{Blanc}$
  - $I(\mathtt{compose})$: $e_1, e_2, e_3 \mapsto V$ si le triplet (e_1, e_2, e_3) est dans l'ensemble suivant :$\{(\mathit{Bleu}, \mathit{Jaune}, \mathit{Vert}), (\mathit{Jaune}, \mathit{Bleu}, \mathit{Vert}), (\mathit{Rouge}, \mathit{Bleu}, \mathit{Violet}), (\mathit{Bleu}, \mathit{Rouge}, \mathit{Violet}), (\mathit{Jaune}, \mathit{Rouge}, \mathit{Orange}), (\mathit{Rouge}, \mathit{Jaune}, \mathit{Orange})\}$
  - $I(\mathtt{oppose})$: $e_1, e_2 \mapsto V$ si la paire (e_1, e_2) est dans l'ensemble $\{(\mathit{Jaune}, \mathit{Violet}), (\mathit{Violet}, \mathit{Jaune}), (\mathit{Vert}, \mathit{Rouge}), (\mathit{Rouge}, \mathit{Vert}), (\mathit{Bleu}, \mathit{Orange}), (\mathit{Orange}, \mathit{Bleu}), (\mathit{Noir}, \mathit{Blanc}), (\mathit{Blanc}, \mathit{Noir})\}$

ainsi que la valuation ζ suivante : $\zeta(x) = \mathit{Noir}$, $\zeta(y) = \mathit{Bleu}$, $\zeta(z) = \mathit{Rouge}$, $\zeta(u) = \mathit{Violet}$

Évaluer la valeur de vérité des formules suivantes par rapport à I et ζ :

- $x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)$
- $\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(z)) \doteq \mathtt{j} \wedge \mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{j})) \doteq y$

Pour chacune des formules suivantes, dire si I en est un modèle :

- $\forall x \forall y \ \mathtt{suiv}(x) \doteq y \Leftrightarrow \mathtt{prec}(y) \doteq x$
- $\forall x \ \mathtt{opposes}(x, \mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(x))))$
- $\forall x \forall y \ \mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(x)) \doteq y \Rightarrow x \doteq \mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(y))))$
- $\forall x \exists y \ (\ \mathtt{opposes}(x, y) \vee x \doteq y \ ) \wedge \mathtt{compose}(\mathtt{prec}(y), \mathtt{suiv}(y), y)$

Corrections

Solution de l'exercice 1

1. — $g(f(x, y)) \vee p(a)$ n'est pas une formule car g est un symbole de fonction et pas un symbole de prédicat.
   — $\forall x \exists y\ p(x) \wedge q(f(y, b))$ n'est pas une formule car l'arité de q est 2.

   Pour la suite, on pose :
   — $A = \exists x\ q(a, y) \wedge p(f(a, b)) \Rightarrow p(x)$
   — $B = p(g(z)) \vee \forall x \exists z\ q(a, y)$
   — $C = \exists x\ q(f(x, y), g(z))$
   — $D = \forall y \forall x\ q(x, y)$
2. — $FV(A) = \{y\}$, $\forall A = \forall y\ A$ et $\exists A = \exists y\ A$
   — $FV(B) = \{y, z\}$, $\forall B = \forall y \forall z\ B$ et $\exists B = \exists y \exists z\ B$
   — $FV(C) = \{y, z\}$, $\forall C = \forall y \forall z\ C$ et $\exists C = \exists y \exists z\ C$
   — $FV(D) = \emptyset$, $\forall D = D$ et $\exists D = D$

Solution de l'exercice 2

— Titi a un prédateur.
  $\exists x\ \texttt{chasse}(x, \texttt{titi})$
— Les chats qui chassent les canaris ne chassent pas les souris.
  $\forall x\ (\texttt{chat}(x) \wedge (\exists y\ \texttt{chasse}(x, y) \wedge \texttt{canari}(y)) \Rightarrow \neg(\exists z\ \texttt{chasse}(x, z) \wedge \texttt{souris}(z)))$
— Spike est un prédateur d'un prédateur de Jerry.
  $\exists x\ \texttt{chasse}(\texttt{spike}, x) \wedge \texttt{chasse}(x, \texttt{titi})$
— x est une proie mais pas un prédateur.
  $\exists y\ \texttt{chasse}(y, x) \wedge \neg \exists z\ \texttt{chasse}(x, z)$
— x a un prédateur unique.
  $\exists y\ \texttt{chasse}(y, x) \wedge \forall z(\texttt{chasse}(z, x) \Rightarrow y \doteq z)$
— x n'est chassé par personne.
  $\forall y\ \neg\texttt{chasse}(y, x)$
— Tous les chasseurs sont des proies.
  $\forall x((\exists y\ \texttt{chasse}(x, y)) \Rightarrow (\exists z\ \texttt{chasse}(z, x)))$
— Tous les chats sont chasseurs et proies.
  $\forall x(\texttt{chat}(x) \Rightarrow \exists y \exists z\ \texttt{chasse}(y, x) \wedge \texttt{chasse}(x, z))$
— Sylvestre et Tom ne chassent pas les mêmes proies.
  $\forall x(\texttt{chasse}(\texttt{tom}, x) \Rightarrow \neg\texttt{chasse}(\texttt{sylvestre}, x))$

Solution de l'exercice 3 Évaluer la valeur de vérité des formules suivantes par rapport à I et ζ :

— $x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)$

$$\begin{aligned} eval(I, \zeta)(x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)) &= ou(eval(I, \zeta)(x \doteq y), eval(I, \zeta)(\neg(x \doteq z))) \\ &= ou(eval(I, \zeta)(x \doteq y), non(eval(I, \zeta)(x \doteq z)) \end{aligned}$$

On a $eval(I,\zeta)(x) = \zeta(x) = Noir$ et $eval(I,\zeta)(y) = \zeta(y) = Bleu$, donc $eval(I,\zeta)(x \doteq y) = 0$.
On a $eval(I,\zeta)(x) = \zeta(x) = Noir$ et $eval(I,\zeta)(z) = \zeta(z) = Rouge$, donc $eval(I,\zeta)(x \doteq z) = 0$.
Donc :

$$\begin{array}{rcl} eval(I,\zeta)(x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)) & = & ou(0, non(0)) \\ & = & 1 \end{array}$$

— $\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(z)) \doteq \mathtt{j} \wedge \mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{j})) \doteq y$
On a :

$$\begin{array}{rcl} eval(I,\zeta)(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(z))) & = & I(\mathtt{suiv})(eval(I,\zeta)(\mathtt{suiv}(z))) \\ & = & I(\mathtt{suiv})(I(\mathtt{suiv})(eval(I,\zeta)(z))) \\ & = & I(\mathtt{suiv})(I(\mathtt{suiv})(\zeta(z))) \\ & = & I(\mathtt{suiv})(I(\mathtt{suiv})(Rouge)) \\ & = & I(\mathtt{suiv})(Orange) \\ & = & Jaune \\ eval(I,\zeta)(\mathtt{j}) & = & I(\mathtt{j}) \\ & = & Jaune \end{array}$$

D'où $eval(I,\zeta)(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(z))) \doteq \mathtt{j} = 1$.
De manière similaire on obtient $eval(I,\zeta)(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{j})) \doteq y) = 1$,
d'où $eval(I,\zeta)(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(z)) \doteq \mathtt{j} \wedge \mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{j})) \doteq y) = 1$

Pour chacune des formules suivantes, dire si I en est un modèle :

— $\forall x \forall y\ \mathtt{suiv}(x) \doteq y \Leftrightarrow \mathtt{prec}(y) \doteq x$
I est un modèle de cette formule (on peut le vérifier exhaustivement, mais c'est un peu long : 64 vérifications à faire, on peu se contenter de 16 vérifications en contraignant les valeurs : si x est rouge on regarde simplement si y est orange ou pas au lieu d'essayer toutes les valeurs de y).

— $\forall x\ \mathtt{opposes}(x, \mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(x))))$
I est un modèle de cette formule (vérification exhaustive plus aisée : 8 cas).

— $\forall x \forall y\ \mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(x)) \doteq y \Rightarrow x \doteq \mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(y))))$
I est un modèle de cette formule (on peut le vérifier exhaustivement, mais c'est un peu long : 64 vérifications à faire, on peut se contenter de 8 vérifications car les cas où $\zeta(y) \neq eval(I,\zeta)(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(x)))$ on immédiatement évaluables à 1 à cause de $\Rightarrow$).

— $\forall x \exists y\ (\ \mathtt{opposes}(x, y) \vee x \doteq y\ ) \wedge \mathtt{compose}(\mathtt{prec}(y), \mathtt{suiv}(y), y)$
I n'est pas un modèle de cette formule (*e.g.* prendre $\zeta(x) = Noir$)