Cours logique - Mémo n°1

Logique propositionnelle

Emmanuel Coquery

1 Syntaxe

Définition 1 (Formules logiques) *Soient les deux constantes* $\top$ *et* $\bot$*, un ensemble* $\mathcal{P}$ *de* variables propositionnelles*, notées* $p, q, r, \ldots$*, et les* connecteurs logiques $\{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

- $\top$*,* $\bot$*,* p *où* p *est une variable propositionnelle sont des formules.*
- *Si* A *est une formule, alors* $\neg(A)$ *est une formule.*
- *Si* A *et* B *sont des formules alors* $(A \vee B)$*,* $(A \wedge B)$*,* $(A \Rightarrow B)$ *et* $(A \Leftrightarrow B)$ *sont des formules.*

On pourra se passer des parenthèses en utilisant les règles suivantes : $\neg$ est plus prioritaire que les autres opérateurs et $\vee$ et $\wedge$ sont plus prioritaires que $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.

Définition 2 *Une formule est* atomique *si c'est* $\top$*,* $\bot$ *ou si c'est une variable propositionnelle.*

Définition 3 (Sous-formules) *Étant donnée une formule logique* A*, l'ensemble de ses* sous-formules *est donné par la fonction* $sf(A)$*, définie inductivement comme suit :*

- *Si* A *est atomique,* $sf(A) = \{A\}$.
- *Si* A *est de la forme* $\neg B$*, alors* $sf(A) = \{A\} \cup sf(B)$.
- *Si* A *est de la forme* $B \vee C$*,* $B \wedge C$*,* $B \Rightarrow C$ *ou* $B \Leftrightarrow C$*, alors* $sf(A) = \{A\} \cup sf(B) \cup sf(C)$.

2 Sémantique

Définition 4 *L'ensemble des* booléens*, noté* $\mathcal{B}$*, est l'ensemble* $\{V, F\}$.

Définition 5 *Une* fonction booléenne *à* n *arguments est une fonction* $\mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$.

Définition 6 *La fonction booléenne* $f_\neg$ *associée au connecteur* $\neg$ *est donnée par la table de vérité suivante :*

x	$f_\neg(x)$
V	F
F	V

Les fonction booléennes $f_\vee$*,* $f_\wedge$*,* $f_\Rightarrow$ *et* $f_\Leftrightarrow$ *associées aux connecteurs* $\vee$*,* $\wedge$*,* $\Rightarrow$ *et* $\Leftrightarrow$ *sont données par la table de vérité suivante :*

x	y	$f_\vee(x,y)$	$f_\wedge(x,y)$	$f_\Rightarrow(x,y)$	$f_\Leftrightarrow(x,y)$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V

Définition 7 *Une* interprétation *pour un ensemble de variable propositionnelles* P *est une fonction* $I : P \to \mathcal{B}$.

Définition 8 *La* valeur de vérité *d'une formule A par rapport à une interprétation I, notée $[A]_I$ est définie inductivement de la manière suivante :*

- *Si p est une variable propositionnelle, $[p]_I = I(p)$.*
- *$[\top]_I = V$ et $[\bot]_I = F$.*
- *Si A est une formule logique alors $[\neg A]_I = f_\neg([A]_I)$.*
- *Si A et B sont deux formules logiques alors :*
  - *$[A \vee B]_I = f_\vee([A]_I, [B]_I)$*
  - *$[A \wedge B]_I = f_\wedge([A]_I, [B]_I)$*
  - *$[A \Rightarrow B]_I = f_\Rightarrow([A]_I, [B]_I)$*
  - *$[A \Leftrightarrow B]_I = f_\Leftrightarrow([A]_I, [B]_I)$*

Définition 9 *Une interprétation I est un* modèle *d'une formule A, noté $I \models A$, si et seulement si $[A]_I = V$.*

Une interprétation I est un modèle d'un ensemble de formules $E = \{A_1, \ldots, A_n\}$, noté $I \models E$, si pour toute formule $A_i \in E$, $I \models A_i$.

Définition 10 *Une formule A est dite* satisfiable *si il existe une interprétation I telle que $I \models A$.*

Une ensemble de formules $E = \{A_1, \ldots, A_n\}$ est satisfiable si il existe une interprétation I qui est un modèle de E.

Une formule (resp. un ensemble de formules) qui n'est pas satisfiable est dit insatisfiable.

Définition 11 *Le problème* SAT *consiste à déterminer si une formule est satisfiable. Autrement dir, $SAT(A) = true$ si A est satisfiable. Sinon $SAT(A) = false$.*

L'algorithme naïf pour résoudre ce problème consiste à énumérer toutes les interprétations possibles de A pour vérifier si une de ces interprétations est un modèle de A. On peut remarquer que si A possède n variables, il existe 2^n interprétations possibles pour A. Il n'existe cependant pas d'algorithme connu permettant de faire mieux dans tous les cas (le problème est dit NP-Complet).

Définition 12 *Une formule A est* valide, *si toute interprétation est un modèle de A. On note $\models A$ le fait que A soit valide. On dit également que A est une* tautologie.

Un ensemble de formules est valide si toutes ses formules sont valides.

Propriété 1 *Une formule A est valide si et seulement si $\neg A$ est insatisfiable.*

Définition 13 *Soit $E = \{A_1, \ldots, A_n\}$ une ensemble de formules et B une formule. B est une conséquence logique de E, noté $E \models B$ si tout modèle de E est un modèle de B.*

Propriété 2

- *$\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$ si et seulement si $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$ est valide.*
- *Si E est insatisfiable, alors pour toute formule B, $E \models B$.*
- *Si B est valide, alors pour tout E, $E \models B$.*
- *$E \models B$ si et seulement si $E \cup \neg B$ est insatisfiable.*

3 Equivalence de formules

Définition 14 *Deux formules A et B sont dites équivalentes, noté $A \equiv B$, si $A \models B$ et $B \models A$.*

Propriété 3 (Principe de substitution) *Soient A, B et C des formules telles que $A \equiv B$ et A est une sous-formule de C. Toute formule C' obtenue en remplaçant une occurrence de A par B dans C est équivalente à C.*

Définition 15 *Soit f une fonction booléenne à n arguments. Soit A une formule ayant n variables $p_1, \ldots, p_n$. Si, pour toute interprétation I de A, on a $f(I(p_1), \ldots, f(I(p_n)) = [A]_I)$, alors ont dit que f est* réalisée par *A.*

Définition 16 *Soit C un ensemble de connecteurs. C est dit* fonctionnellement complet *si pour toute fonction booléenne f il existe une formule A ne contenant que des connecteurs de C et telle que f soit réalisée par A.*

Propriété 4 $\{\neg, \vee, \wedge\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ *et* $\{\neg, \Rightarrow\}$ *sont fonctionnellement complets.*

Quelques équivalences remarquables :

$\neg\top \equiv \bot$

$\neg\bot \equiv \top$

$\top \wedge A \equiv A$

$\bot \vee A \equiv A$

$\top \vee A \equiv \top$

$\bot \wedge A \equiv \bot$

$A \vee \neg A \equiv \top$

$A \wedge \neg A \equiv \bot$

$\neg\neg A \equiv A$

$A \vee A \equiv A \equiv A \wedge A$

$A \vee B \equiv B \vee A$

$A \wedge B \equiv B \wedge A$

$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
$\equiv A \vee B \vee C$

$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
$\equiv A \wedge B \wedge C$

$A \wedge (A \vee B) \equiv A$

$A \vee (A \wedge B) \equiv A$

$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge C) \vee (A \wedge C)$

Quelques tautologies remarquables :

$A \Rightarrow A$ (identité)

$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (loi de Pierce)

$A \vee \neg A$ (tiers exclu)

$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ (modus ponens)

$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ (modus tollens)

$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (modus barbara)