Cours logique - Mémo n°2

Systèmes de déduction syntaxiques

Emmanuel Coquery

Un système de déduction est un système permettant de faire des démonstrations. Les systèmes sont dits syntaxiques quand leur application se base sur la forme des choses (c'est-à-dire leur syntaxe) et non sur leur signification (c'est-à-dire leur sémantique). Par exemple, un système permettant de raisonner sur des formules n'utilisera pas directement le fait qu'une formule soie valide ou satisfiable. En revanche la justification du bon fonctionnement du système repose sur la sémantique.

1 Filtrage de motif

Etant données deux formules A et B, on peut se poser la question de savoir s'il existe σ telle que $B = A\sigma$. Ce problème correspond à la notion de *filtrage de motif* (en anglais *pattern matching*), appliquée au cas des formules.

Définition 1 *Soit A et B deux formules et σ une substitution telle que $A\sigma = B$. B est une* instance *du* motif *A.*

Propriété 1 *Soit A et B deux formules. Si B est une instantiation de A alors la substitution σ telle que $A\sigma = B$ peut être calculée avec la fonction* match(A,B) *définie récursivement comme suit :*

- *si $A = p$, alors, $\sigma = [{}^{B}/_{p}]$.*
- *si $A = B = \top$ ou si $A = B = \bot$, alors σ est la fonction de domaine vide.*
- *si $A = \neg A'$ et $B = \neg B'$ alors $\sigma = match(A', B')$.*
- *si $A = A' \vee A''$ et $B = B' \vee B''$, si $\sigma' = match(B', B'')$ et $\sigma'' = match(A'', B'')$ et si pour tout $x \in dom(\sigma') \cap dom(\sigma'')$, $\sigma'(x) = \sigma''(x)$, alors σ est définie comme :*
  - *$dom(\sigma) = dom(\sigma') \cup dom(\sigma'')$*
  - *$\sigma(x) = \sigma'(x)$ si $x \in dom(\sigma')$*
  - *$\sigma(x) = \sigma''(x)$ si $x \in dom(\sigma'')$*

  Sinon, $match(A, B)$ n'est pas défini.
- *Dans les autres cas (*e.g. *$A = A' \vee A''$ et $B = \neg B'$), B n'est pas une instantiation de A et match n'est pas définie.*

Exercice : Montrer que si A est une instance de B et si $\sigma = match(A, B)$, alors $A\sigma = B$

2 Arbres de dérivation

Définition 2 *Notion de jugement : un jugement est un résultat, final ou intermédiaire, dans une démonstration.*

Selon le système de déduction, un *jugement* peut être une formule, une paire de formule, un ou plusieurs (multi-)ensembles de formules ou tout autre chose.

On suppose que l'on peut étendre les notions de substitution et d'instance aux jugements. Dans ce cas, la notion de variable pourra être étendue pour correspondre, e.g., à des ensembles de formules.

Afin de bien distinguer les variables servant au filtrage de motifs des autres, on les notera $A, B, \ldots$ pour les formules et $\Gamma, \Delta, \ldots$ pour les autres structures (e.g. les ensembles de formules). La notation pour les variables est ainsi la même que celle des méta-variables utilisées pour représenter les formules jusqu'ici.

Définition 3 *Notion de règle d'inférence : une* règle d'inférence *est de la forme :*

$$\frac{J_1 \quad \ldots \quad J_n}{J}$$

où J_1, …, J_n et J sont des (méta-)jugements. J_1, …, J_n sont appelés prémisses *et J est appelé* conclusion*.*

Définition 4 *Un* axiome *est une règle sans prémisse.*

Définition 5 *Soit une deux règles d'inférences*

$$R : \frac{J_1 \quad \ldots \quad J_n}{J}$$

et

$$R' : \frac{J'_1 \quad \ldots \quad J'_n}{J'}$$

On dit que R' est une instance de R s'il existe σ telle que $J_1\sigma = J'_1$, …, $J_n\sigma = J'_n$ et $J\sigma = J'$.

Une dérivation est une preuve dans le système de déduction considéré.

Définition 6 *Étant donné un système de déduction, une* dérivation *est un arbre dont les nœuds sont des jugements et tel que pour tout jugement J, si J à comme fils J_1, …, J_n, alors*

$$\frac{J_1 \quad \ldots \quad J_n}{J}$$

est une instance d'une règle du système.

La racine de l'arbre est appelée conclusion *de la dérivation.*

Remarque : les feuilles de l'arbre correspondent à l'utilisation d'axiomes.

On dira qu'un jugement est *prouvable* dans un système de déduction s'il existe une dérivation dans ce système de déduction ayant ce séquent comme conclusion. Si un jugement J est conclusion d'une dérivation, celle-ci sera dite "*dérivation de J*".

Afin de pouvoir dire si un système de déduction fonctionne correctement, il est nécessaire de pouvoir dire si la conclusion d'une dérivation est correcte. On associe ainsi aux jugement une notion de correction, en général issue de la sémantique. Par exemple, on pourra dire qu'un jugement se présentant sous la forme d'une formule est correct si cette formule est valide.

Définition 7 *Un système de déduction sera dit* correct *si pour chacune de ses règles, le fait que l'ensemble de ses prémisses soit correctes impose que la conclusion soie correcte.*

En particulier, cela implique que toutes les conclusions de dérivations dans un système correct sont des jugements corrects.

Définition 8 *Un système de déduction sera dit* complet *si tout jugement correct est la conclusion d'une dérivation finie.*

Autrement dit, tout jugement correct est prouvable dans un système complet.

Attention : un système peut être correct sans être complet (on ne peut alors pas tout prouver dedans). Il peut être complet sans être correct (il permet de prouver tous les jugements correct, mais donne aussi des preuves de jugement incorrects). L'idéal est évidement d'utiliser des systèmes de déductions corrects et complets. Si de tels systèmes existent pour le calcul propositionnel, nous verrons que cela n'est pas toujours le cas dans d'autres logiques plus expressives.