Cours logique - Mémo n°2

Substitutions
Systèmes de déduction

Emmanuel Coquery

1 Substitutions en calcul propositionnel

Définition 1 *Une substitution est une fonction σ d'un ensemble fini de variables propositionnelles dans les formules. On notera $dom(\sigma)$ son domaine de définition.*

Notation: on notera $[^{A_1}/_{p_1}, \ldots, ^{A_n}/_{p_n}]$ la substitution σ qui, pour $1 \leq i \leq n$, associe la formule A_i à la variable p_i.

Définition 2 *L'application d'une substitution σ à une formule A, notée $A\sigma$, est définie inductivement par :*

- $\top\sigma = \top$
- $\bot\sigma = \bot$
- $p\sigma = \sigma(p)$ *si p est une variable propositionnelle appartenant à $dom(\sigma)$*
- $p\sigma = p$ *si p est une variable propositionnelle n'appartenant pas à $dom(\sigma)$*
- $(\neg A)\sigma = \neg(A\sigma)$
- $(A \vee B)\sigma = A\sigma \vee B\sigma$
- $(A \wedge B)\sigma = A\sigma \wedge B\sigma$
- $(A \Rightarrow B)\sigma = A\sigma \Rightarrow B\sigma$
- $(A \Leftrightarrow B)\sigma = A\sigma \Leftrightarrow B\sigma$

Propriété 1 *Soit A une formule et σ une substitution quelconques. Si A est valide, alors $A\sigma$ est valide.*

Preuve: Soit $\sigma = [^{A_1}/_{p_1}, \ldots, ^{A_n}/_{p_n}]$ une substitution quelconque. Il faut montrer pour toute interprétation I, $[A\sigma]_I = V$. Soit I une interprétation quelconque.

On introduit une interprétation auxiliaire I^σ telle que I^σ est identique à I sauf pour les variables substituées par σ. Pour une telle variable p_i, la valeur de I^σ est donnée par la valeur de vérité dans I de la formule A_i qui remplace p_i. Plus formellement, I^σ est définie par :

- $I^\sigma(p) = I(p)$ si p n'est pas dans $dom(\sigma)$
- $I^\sigma(p) = [\sigma(p)]_I$ si p est dans $dom(\sigma)$
  (c'est-à-dire $I^\sigma(p_i) = [A_i]_I$ pour $1 \leq i \leq n$).

On montre à présent par induction que pour toute formule B, $[B\sigma]_I = [B]_{I^\sigma}$. On procède par cas en fonction de la forme de B :

- $B = \top$: on a $B\sigma = \top$ et $[B\sigma]_I = [\top]_I = V = [\top]_{I^\sigma} = [B]_{I^\sigma}$.
- $B = \bot$: on a $B\sigma = \bot$ et $[B\sigma]_I = [\bot]_I = F = [\bot]_{I^\sigma} = [B]_{I^\sigma}$.
- $B = p$ avec p qui n'est pas dans $dom(\sigma)$: on a $B\sigma = p$
  et $[B\sigma]_I = [p]_I = I(p) = I^\sigma(p) = [p]_{I^\sigma} = [B]_{I^\sigma}$.
- $B = p$ avec p qui est dans $dom(\sigma)$: on a $B\sigma = \sigma(p)$
  et $[B\sigma]_I = [\sigma(p)]_I = I^\sigma(p) = [p]_{I^\sigma} = [B]_{I^\sigma}$.
- $B = \neg C$: on a $B\sigma = \neg(C\sigma)$ et, par hypothèse d'induction, $[C\sigma]_I = [C]_{I^\sigma}$.
  On en déduit : $[B\sigma]_I = [\neg(C\sigma)]_I = f_\neg([C\sigma]_I) = f_\neg([C]_{I^\sigma}) = [\neg C]_{I^\sigma} = [B]_{I^\sigma}$.

– $B = C \vee D$: on a $B\sigma = C\sigma \vee D\sigma$ et par hypothèse d'induction, $[C\sigma]_I = [C]_{I^\sigma}$ et $[D\sigma]_I = [D]_{I^\sigma}$.
  On en déduit : $[B\sigma]_I = [C\sigma \vee D\sigma]_I = f_\vee([C\sigma]_I, [D\sigma]_I) = f_\vee([C]_{I^\sigma}, [D]_I) = [C \vee D]_{I^\sigma} = [B]_{I^\sigma}$
– La démonstration des cas $\wedge$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ est similaire au cas précédent.

Ce résultat est en particulier vrai pour A, c'est-à-dire que $[A\sigma]_I = [A]_{I^\sigma}$. Comme A est valide, $[A]_{I^\sigma} = V$. Comme I est quelconque, ce résultat est vrai pour tout I. Donc pour toute interprétation I, $[A\sigma]_I = V$, donc $A\sigma$ est valide. □

Corollaire 1 *Si $A \equiv B$ alors pour toute substitution $A\sigma \equiv B\sigma$*

En particulier, pour démontrer une équivalence remarquable, il suffit de la démontrer lorsque les formules sont des variables (par exemple en utilisant les tables de vérités), le corollaire précédent permettant d'étendre le résultat à toutes les formules.

2 Systèmes de déduction syntaxiques

Un système de déduction est un système permettant de faire des démonstrations. Les systèmes sont dits syntaxiques quand leur application se base sur la forme des choses (c'est-à-dire leur syntaxe) et non sur leur signification (c'est-à-dire leur sémantique). Par exemple, un système permettant de raisonner sur des formules n'utilisera pas directement le fait qu'une formule soie valide ou satisfiable. En revanche la justification du bon fonctionnement du système repose sur la sémantique.

Définition 3 *Notion de jugement : un jugement est un résultat, final ou intermédiaire, dans une démonstration.*

Selon le système de déduction, un *jugement* peut être une formule, une paire de formule, un ou plusieurs (multi-)ensembles de formules ou tout autre chose.

Définition 4 *Notion de règle d'inférence : une* règle d'inférence *est de la forme :*

$$\frac{J_1 \quad \ldots \quad J_n}{J}$$

où J_1, …, J_n et J sont des (méta-)jugements. J_1, …, J_n sont appelés prémisses *et J est appelé* conclusion.

Définition 5 *Un* axiome *est une règle sans prémisse.*

Une dérivation est une preuve dans le système de déduction considéré.

Définition 6 *Étant donné un système de déduction, une* dérivation *est un arbre dont les nœuds sont des jugements et tel que pour tout jugement J, si J à comme fils J_1, …, J_n, alors*

$$\frac{J_1 \quad \ldots \quad J_n}{J}$$

est une (instance d'une) règle du système.

La racine de l'arbre est appelée conclusion *de la dérivation.*

Remarque : les feuilles de l'arbre correspondent à l'utilisation d'axiomes.

On dira qu'un jugement est *prouvable* dans un système de déduction s'il existe une dérivation dans ce système de déduction ayant ce séquent comme conclusion. Si un jugement J est conclusion d'une dérivation, celle-ci sera dite "*dérivation de J*".

Afin de pouvoir dire si un système de déduction fonctionne correctement, il est nécessaire de pouvoir dire si la conclusion d'une dérivation est correcte. On associe ainsi aux jugement une notion de correction, en général issue de la sémantique. Par exemple, on pourra dire qu'un jugement se présentant sous la forme d'une formule est correct si cette formule est valide.

Définition 7 *Un système de déduction sera dit* correct *si pour chacune de ses règles, le fait que l'ensemble de ses prémisses soit correctes impose que la conclusion soie correcte.*

En particulier, cela implique que toutes les conclusions de dérivations dans un système correct sont des jugements corrects.

Définition 8 *Un système de déduction sera dit* complet *si tout jugement correct est la conclusion d'une dérivation finie.*

Autrement dit, tout jugement correct est prouvable dans un système complet.

Attention : un système peut être correct sans être complet (on ne peut alors pas tout prouver dedans). Il peut être complet sans être correct (il permet de prouver tous les jugements correct, mais donne aussi des preuves de jugement incorrects). L'idéal est évidement d'utiliser des systèmes de déductions corrects et complets. Si de tels systèmes existent pour le calcul propositionnel, nous verrons que cela n'est pas toujours le cas dans d'autres logiques plus expressives.