Cours logique - Mémo n°3

Calcul des séquents

Emmanuel Coquery

1 Préliminaires

Un multi-ensemble est un ensemble dans lequel on tient compte des occurrences des éléments. On peut également le voir comme une liste non ordonnée. Plus formellement, on le considère comme une fonction qui à chaque élément associe son nombre d'occurrences :

Définition 1 *Un multi-ensemble* Γ *sur un ensemble* $\mathcal{E}$ *est une fonction* $\Gamma : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$.

Remarque: Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ et si Γ est un multi-ensemble sur $\mathcal{E}$, alors on peut définir un multi-ensemble Γ' identique à Γ, mais défini sur $\mathcal{E}'$ par : $\Gamma'(e) = Gamma(e)$ si $e \in \mathcal{E}$ et $\Gamma'(e) = 0$ sinon. Par la suite, on identifiera Γ et Γ' et on laissera l'ensemble $\mathcal{E}$ implicite lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Notation: On notera $\{\{e_1, \ldots, e_n\}\}$ le multi-ensemble qui à un élément e associe le nombre de fois où il apparaît dans $e_1, \ldots, e_n$. Le multi-ensemble vide (qui à tout élément associe 0) est noté $\emptyset$.

Définition 2 *Si* Γ *et* Δ *sont des multi-ensembles alors :*
- $\Gamma \cup \Delta$ *est le multi-ensemble défini par :* $(\Gamma \cup \Delta)(e) = \Gamma(e) + \Delta(e)$.
- $\Gamma \setminus \Delta$ *est le multi-ensemble défini par :*
  $(\Gamma \setminus \Delta)(e) = 0$ *si* $\Gamma(e) < \Delta(e)$
  $(\Gamma \setminus \Delta)(e) = \Gamma(e) - \Delta(e)$ *sinon.*

Par la suite on prendra l'ensemble des formules du calcul propositionnel pour $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire que le l'on manipulera des multi-ensembles de formules) et on emploiera la notation suivante :
Notation: Par la suite, si Γ et Δ sont des multi-ensembles et A et B des formules, on notera :
- Γ, Δ pour $\Gamma \cup \Delta$
- Γ, A ou A, Γ pour $\Gamma \cup \{\{A\}\}$
- A, B pour $\{\{A, B\}\}$

2 Le système de calcul de séquents $\mathcal{LK}$

Introduit par Gentzen dans les années 30.

Définition 3 *Un jugement en calcul de séquent est de la forme*

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$$

où $A_1, \ldots, A_n$ *et* $B_1, \ldots, B_m$ *sont des multi-ensembles de formules. On notera également un tel jugement par* $\Gamma \vdash \Delta$.

Si $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ et $\Delta = B_1, \ldots, B_m$, le jugement $\Gamma \vdash \Delta$ se lit : "de A_1 et ... et A_n on peut déduire B_1 ou ... ou B_n".

Définition 4 *On dira que* $\Gamma \vdash \Delta$ *est* correct *si la formule* $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_n$ *est valide.*

Si on considère un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ avec $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ et $\Delta = B_1, \ldots, B_m$ alors :

- si $n = 0$ alors $\Gamma = \emptyset$ et $\Gamma \vdash \Delta$ est noté $\vdash \Delta$. Il est correct si $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ est valide.
- si $m = 0$ alors $\Delta = \emptyset$ et $\Gamma \vdash \Delta$ est noté $\Gamma \vdash$. Il est correct si $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$ est valide.

Les règles du calcul des séquents sont réparties en quatre groupes : le groupe structurel, le groupe logique, l'identité et la coupure. Elles sont présentées dans la table 1.

Théorème 1 (Élimination des coupures, Gentzen) *Tout séquent* $\Gamma \vdash \Delta$ *est prouvable dans le calcul de séquent* $\mathcal{LK}$ *si et seulement si il est prouvable dans le système* $\mathcal{LK}$ *sans la règle* $(Coupure)$.

Exemples de dérivations en calcul de séquents $\mathcal{LK}$:

- Preuve de $p \to p$:

$$\dfrac{p \vdash p}{\vdash (p \Rightarrow p)}\ (\Rightarrow_D)$$

- Preuve de $\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{\vdash p, \neg p}\,(\neg_D) \qquad \dfrac{q \vdash q}{\vdash q, \neg q}\,(\neg_D)}{\vdash p \wedge q, \neg p, \neg q}\,(\wedge_D)}{\neg(p \wedge q) \vdash \neg p, \neg q}\,(\neg_G)}{\neg(p \wedge q) \vdash \neg p, \neg p \vee \neg q}\,(\vee_D^2)}{\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q}\,(\vee_D^1)}{\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q}\,(C_D)}{\vdash \neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q}\,(\Rightarrow_D)$$

- Preuve de $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p \quad q \vdash q}{p \vee q \vdash p, q}(\vee_G) \qquad \dfrac{q \vdash q}{\vdash q, \neg q}(\neg_D)}{p \vee q \vdash p \wedge \neg q, q, q}(\wedge_D)}{p \vee q \vdash p \wedge \neg q, q}(C_D) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{\vdash \neg p, p}(\neg_D) \qquad \dfrac{p \vdash p \quad q \vdash q}{p \vee q \vdash q, p}(\vee_G)}{p \vee q \vdash \neg p \wedge q, p, p}(\wedge_D)}{p \vee q \vdash \neg p \wedge q, p}(C_D)}{p \vee q, p \vee q \vdash p \wedge \neg q, \neg p \wedge q, p \wedge q}(\wedge_D)}{p \vee q \vdash p \wedge \neg q, \neg p \wedge q, p \wedge q}(C_G)}{p \vee q, \neg(p \wedge q) \vdash p \wedge \neg q, \neg p \wedge q}(\neg_G)}{p \vee q, \neg(p \wedge q) \vdash p \wedge \neg q, (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)}(\vee_D^2)}{p \vee q, \neg(p \wedge q) \vdash (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q), (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)}(\vee_D^1)}{p \vee q, \neg(p \wedge q) \vdash (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)}(C_D)}{p \vee q, (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \vdash (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)}(\wedge_G^2)}{(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q), (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \vdash (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)}(\wedge_G^1)}{(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \vdash (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)}(C_G)}{\vdash (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)}(\Rightarrow_D)$$

Règles structurelles

$$(A_G)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad\qquad (A_D)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

$$(C_G)\quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad\qquad (C_D)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}$$

Règles logiques

$$(\wedge_G^1)\quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$(\wedge_D)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma' \vdash \Delta', B}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', A \wedge B}$$

$$(\wedge_G^2)\quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$(\vee_D^1)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\vee_G)\quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash \Delta, \Delta'}$$

$$(\vee_D^2)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\Rightarrow_G)\quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \qquad\qquad (\Rightarrow_D)\quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$$

$$(\neg_G)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D)\quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

Axiome identité

$$(Id)\quad \frac{}{A \vdash A}$$

Règle de coupure

$$(Coupure)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

TAB. 1 – Règles du calcul des séquents $\mathcal{LK}$

3 Le système $\mathcal{G}$

Il s'agit d'un système équivalent au calcul de séquent, mais plus déterministe dans la recherche des preuves. Les règles du système $\mathcal{G}$ sont données dans la table 2.

Par la suite, lorsque l'on aura besoin de parler du système $\mathcal{G}$ et du système $\mathcal{LK}$ au même moment, on indicera le nom de leur règles par leur système. Par exemple $(\vee_G)_{\mathcal{LK}}$ est la règle $(\vee_G)$ dans $\mathcal{LK}$ et la règle $(\vee_G)_{\mathcal{G}}$ est la règle $(\vee_G)$ dans $\mathcal{G}$.

Règles logiques

$$(\vee_G)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee_D)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\wedge_G)\ \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge_D)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\Rightarrow_G)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow_D)\ \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg_G)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

Axiome

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$

TAB. 2 – Règles du système $\mathcal{G}$

Lemme 1 *Un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans le système $\mathcal{G}$ auquel on ajoute les règles structurelles du système $\mathcal{LK}$ si et seulement si il est prouvable dans $\mathcal{G}$.*

La preuve du lemme, que nous ne détaillerons pas ici, consiste à montrer que l'on peut faire "remonter" les règles d'affaiblissement (A_G) et (A_D), ainsi que les règles de contractions (C_G) et (C_D) vers les feuilles où elles seront "absorbées" par les axiomes (i.e. appliquer un affaiblissement ou une contraction juste avant un axiome en remontant dans la preuve est inutile).

On peut remarquer que les règles de $\mathcal{G}$ correspondent toutes à une ou deux règles de $\mathcal{LK}$. On peut par exemple montrer que $(\vee_G)_\mathcal{G}$ correspond à $(\vee_G)_{\mathcal{LK}}$. Cette démonstration fait intervenir les règles structurelles, mais d'après le lemme 1, on peut les ajouter dans $\mathcal{G}$ sans changer les séquents démontrables par le système. Pour démontrer cette correspondance, on montre que $(\vee_G)_\mathcal{G}$ peut être vue comme un morceau de dérivation faisant intervenir $(\vee_G)_{\mathcal{LK}}$, et inversement :

– $(\vee_G)_\mathcal{G}$ vue comme un morceau de dérivation faisant intervenir $(\vee_G)_{\mathcal{LK}}$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma, A \vee B \vdash \Delta, \Delta}(\vee_G)_{\mathcal{LK}}}{\Gamma, \Gamma, A \vee B \vdash \Delta}(C_D)\text{ appliquée } m \text{ fois pour dupliquer } \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}(C_G)\text{ appliquée } n \text{ fois pour dupliquer } \Gamma$$

– $(\vee_G)_{\mathcal{LK}}$ vue comme un morceau de dérivation faisant intervenir $(\vee_G)_\mathcal{G}$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta, \Delta'}(A_D)\ m' \text{ fois}}{\Gamma, \Gamma', A \vdash \Delta, \Delta'}(A_G)\ n' \text{ fois} \qquad \cfrac{\cfrac{\Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma', B \vdash \Delta, \Delta'}(A_D)\ m \text{ fois}}{\Gamma, \Gamma', B \vdash \Delta, \Delta'}(A_G)\ n \text{ fois}}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash \Delta, \Delta'}(\vee_G)_\mathcal{G}$$

on suppose que la taille de Γ (resp. Γ', Δ et Δ') est n (resp. n', m, m'). Les règles d'affaiblissement (A_G) et (A_D) sont utilisées pour supprimer Γ, Γ', Δ et Δ' lorsque c'est nécessaire.

On peut montrer de la même manière que $(\wedge_D)_{\mathcal{LK}}$ correspond à $(\wedge_D)_{\mathcal{G}}$ et que $(\Rightarrow_G)_{\mathcal{LK}}$ correspond à $(\Rightarrow_G)_{\mathcal{G}}$.

On montre également que $(\vee_D)_{\mathcal{G}}$ correspond à $(\vee_D^1)_{\mathcal{LK}}$ et $(\vee_D^2)_{\mathcal{LK}}$:

– $(\vee_D)_{\mathcal{G}}$ vue comme un morceau de dérivation faisant intervenir $(\vee_D^1)_{\mathcal{LK}}$ et $(\vee_D^2)_{\mathcal{LK}}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A, A \vee B}(\vee_D^2)_{\mathcal{LK}}}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B, A \vee B}(\vee_D^1)_{\mathcal{LK}}}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}(C_D)$$

– $(\vee_D^1)_{\mathcal{LK}}$ vue comme un morceau de dérivation faisant intervenir $(\vee_D)_{\mathcal{G}}$:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A, B}(A_D)}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}(\vee_D)_{\mathcal{G}}$$

– $(\vee_D^2)_{\mathcal{LK}}$ vue comme un morceau de dérivation faisant intervenir $(\vee_D)_{\mathcal{G}}$:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A, B}(A_D)}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}(\vee_D)_{\mathcal{G}}$$

On peut montrer de la même manière que $(\wedge_G)_{\mathcal{G}}$ correspond à $(\wedge_G^1)_{\mathcal{LK}}$ et $(\wedge_G^2)_{\mathcal{LK}}$.

On peut également remarquer que les règles $(\Rightarrow_D)$, $(\neg_G)$ et $(\neg_D)$ sont identiques dans $\mathcal{G}$ et dans $\mathcal{LK}$.

Enfin l'axiome dans $\mathcal{LK}$ est un cas particulier de l'axiome dans $\mathcal{G}$ (il suffit de prendre $\Gamma = \emptyset$ et $\Delta = \emptyset$). D'un autre côté l'axiome $\Gamma, A \vdash \Delta, B$ de $\mathcal{G}$ est prouvable dans $\mathcal{LK}$: il suffit d'appliquer de manière répétée (A_G) et (A_D) pour éliminer Γ et Δ en remontant et ainsi obtenir $A \vdash A$ qui est l'axiome dans $\mathcal{LK}$.

Lemme 2 *Un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ dans le système $\mathcal{G}$ auquel on ajoute les règles structurelles de $\mathcal{LK}$ si et seulement si il est prouvable dans $\mathcal{LK}$ sans $(Coupure)$.*

Preuve: Étant donnée une dérivation de $\Gamma \vdash \Delta$ dans $\mathcal{LK}$ sans $(Coupure)$, on peut construire une dérivation de $\Gamma \vdash \Delta$ dans $\mathcal{G}$ auquel on ajoute les règles structurelles de $\mathcal{LK}$ en remplaçant chaque application de règle par le morceau de dérivation qui lui correspond (donné ci-dessus pour $(\vee_G)$, $(\vee_D^1)$ et $(\vee_D^2)$).

De même, étant donnée une dérivation de $\Gamma \vdash \Delta$ dans $\mathcal{G}$ auquel on ajoute les règles structurelles de $\mathcal{LK}$, il est possible de construire une dérivation de $\Gamma \vdash \Delta$ dans $\mathcal{LK}$ sans $(Coupure)$. □

Propriété 1 *Étant donné un séquent $\Gamma \vdash \Delta$, il existe une dérivation dans $\mathcal{LK}$ ayant $\Gamma \vdash \Delta$ comme conclusion si et seulement si il existe une dérivation dans $\mathcal{G}$ ayant également $\Gamma \vdash \Delta$ comme conclusion.*

Preuve: D'après le théorème d'élimination des coupures, $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans $\mathcal{LK}$ si seulement si il est prouvable dans $\mathcal{LK}$ sans $(Coupure)$. C'est-à-dire, d'après le lemme 2 si et seulement si il est prouvable dans $\mathcal{G}$ auquel on ajoute les règles structurelles de $\mathcal{LK}$. C'est-à-dire, d'après le lemme 1, si et seulement si il est prouvable dans $\mathcal{G}$. □

Propriété 2 *Le système $\mathcal{G}$ n'est pas sensible à l'ordre d'application des règles : si deux règles (R_1) et (R_2) du système $\mathcal{G}$ peuvent être appliquées et avoir un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ comme conclusion, et s'il existe une dérivation de $\Gamma \vdash \Delta$ dans $\mathcal{G}$ dont la règle la plus proche de la conclusion est (R_1), alors il existe une dérivation de $\Gamma \vdash \Delta$ dans $\mathcal{G}$ dont la règle la plus proche de la conclusion est (R_2).*

Autrement dit, on peut choisir de manière arbitraire une règle parmi les règles applicables à un moment donné lorsque l'on construit une dérivation sans que cela n'aie d'impact sur la possibilité de terminer la dérivation. Si on voit les multi-ensemble dans les séquent comme des liste, on peut par exemple choisir d'appliquer la règle qui concerne la formule non atomique la plus à gauche dans le séquent. Si on réussit la dérivation, on obtient un *arbre de dérivation systématique* du séquent conclusion.

Corollaire 1 *Étant donné un séquent $\Gamma \vdash \Delta$, il existe une dérivation de $\Gamma \vdash \Delta$ dans $\mathcal{G}$ si et seulement si il existe un arbre de dérivation systématique de $\Gamma \vdash \Delta$ dans $\mathcal{G}$.*

Ce corollaire donne un algorithme pour prouver un séquent dans $\mathcal{G}$: il suffit d'essayer de construire un arbre de dérivation systématique du séquent. Si la construction réussit, le séquent admet une dérivation dans $\mathcal{G}$, sinon aucune dérivation dans $\mathcal{G}$ n'admet ce séquent comme conclusion.

Propriété 3 *Le système $\mathcal{G}$ est correct et complet : étant donné un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$, il existe une dérivation dans $\mathcal{G}$ ayant $\Gamma \vdash \Delta$ comme conclusion si et seulement si la formule $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m$ est valide.*

Corollaire 2 *Le système $\mathcal{LK}$ est correct et complet : étant donné un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$, il existe une dérivation dans $\mathcal{LK}$ ayant $\Gamma \vdash \Delta$ comme conclusion si et seulement si la formule $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m$ est valide.*

Exemple de dérivation dans le système $\mathcal{G}$: preuve de $\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p, \neg q}{\vdash p, \neg p, \neg q}(\neg_D) \qquad \dfrac{\dfrac{p, q \vdash q}{p \vdash q, \neg q}(\neg_D)}{\vdash q, \neg p, \neg q}(\neg_D)}{\vdash p \wedge q, \neg p, \neg q}(\wedge_D)}{\vdash \neg p \vee \neg q, p \wedge q}(\vee_D)}{\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q}(\neg_G)}{\vdash \neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q}(\Rightarrow_D)
$$

On peut remarquer que cette dérivation a été obtenue de bas en haut en appliquant systématiquement la règle concernant la formule non atomique la plus à gauche dans le séquent.