Cours logique - Mémo n°4
Résolution en calcul propositionnel

Emmanuel Coquery

1 Formes conjonctives et disjonctives

Notation: Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des formules, on utilise les notations suivantes :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \qquad \text{et} \qquad \bigvee_{i=1}^{n} A_i = A_1 \vee \ldots \vee A_n$$

Si $n = 0$:

$$\bigwedge_{i=1}^{0} A_i = \top \qquad \text{et} \qquad \bigvee_{i=1}^{0} A_i = \bot$$

Si $n = 1$:

$$\bigwedge_{i=1}^{1} A_i = A_1 \qquad \text{et} \qquad \bigvee_{i=1}^{1} A_i = A_1$$

Définition 1 *Un* littéral *est une formule atomique ou la négation d'une formule atomique*

Définition 2 *Une* formule conjonctive *est une formule de la forme :* $\bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{m} A_i^j$ *où les* A_i^j *sont des littéraux.*

Définition 3 *Une* formule disjonctive *est une formule de la forme :* $\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{m} A_i^j$ *où les* A_i^j *sont des littéraux.*

Attention à une pas confondre *formule conjonctive* et *conjonction* (c.-à.-d. une formule de la forme $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i$, où les A_i peuvent être n'importe quelle formule). De même, il ne faut pas confondre *formule disjonctive* et *disjonction*. Cependant, on peut remarquer qu'une formule conjonctive est un cas particulier de conjonction (en fait c'est une conjonction de disjonctions de littéraux).

Notation: Lorsque l'on écrit une conjonction de formules, on pourra omettre la formule $\top$ (car $A \wedge \top \equiv A$). De même, lorsque l'on écrit une disjonction de formules, on pourra omettre la formule $\bot$.

Propriété 1 *Pour toute formule* A*, il existe une formule conjonctive* A' *et une formule disjonctive* A'' *telles que* $A \equiv A' \equiv A''$

Preuve: On comme par éliminer de A les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ en utilisant les équivalences suivantes :

$B \Rightarrow C \equiv \neg B \vee C$

$B \Leftrightarrow C \equiv (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)$

On obtient alors une formule équivalente à A et qui ne contient que $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\top$, $\bot$ et des variables propositionnelles. Dans la suite de la preuve, on supposera que A ne contient que $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\top$, $\bot$ et des variables propositionnelles (c.-à.-d. que $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ on déjà été élmininés).

On procède ensuite par induction sur A pour montrer l'existence de A' et A'' :

- Si A est un littéral, alors elle est déjà en forme conjonctive et en forme disjonctive.
- Si $A = B \vee C$, alors, par induction, il existe des formules conjonctives B' et C' et des formules disjonctives B'' et C'' telles que $B' \equiv B'' \equiv B$ et $C' \equiv C'' \equiv C$. On peut remarquer que $A'' = B'' \vee C''$ est une formule disjonctive équivalente à A.

  Construisons à présent une formule conjonctive équivalente à A. Pour cela, on remarque tout d'abord que $A' = \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} A_i'^j$ et $B' = \bigwedge_{k=1}^{p} \bigvee_{l=1}^{q} B_k'^l$. En appliquant les règles de distributivité sur la formule $A' \vee B'$, on obtient :

  $$A' = \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{k=1}^{p} (\bigvee_{j=1}^{n} A_i'^j \vee \bigvee_{l=1}^{q} B_k'^l)$$

  On peut remarquer que A' est une formule conjonctive équivalente à A.
- Si $A = B \wedge C$, la preuve est similaire au cas précédent.
- Si $A = \neg B$, alors par hypothèse d'induction, il existe $B' = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1} B_i'^j$ avec $B' \equiv B$. En utilisant les lois de De Morgan, on peut faire entrer la négation à l'intérieur des $\wedge$ et des $\vee$, puis éliminer les doubles négations (de la forme $\neg\neg A$). On obtient alors la formule disjonctive $A'' = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1} A_i''^j$ avec $A_i''^j = C_i^j$ si $B_i^j = \neg C_i^j$ et $A_i''^j = \neg B_i^j$ sinon. On peut remarquer que $A'' \equiv A$. On peut également construire de manière similaire A' à partir de B'', où B'' est la forme disjonctive de B.

$\square$

Définition 4 *Un* clause *est une disjonction de littéraux.*

Une formule conjonctive est donc une conjonction de clauses.

Par la suite, on identifiera chaque clause avec toute autre clause obtenue en permutant ses littéraux, en éliminant des littéraux déjà présents dans la clause u en éliminant $\bot$ et $\neg\top$ de la clause. Par exemple, on identifiera $r \vee \neg q \vee r \vee \bot \vee \neg p$ avec $\neg p \vee \neg q \vee r$.

La clause vide (c.-à-d. une disjonction vide de littéraux, donc la formule $\bot$) sera également notée $\square$.

2 Réfutation par résolution

La méthode de résolution est utilisée pour montrer qu'un ensemble de clauses est insatisfiable. Elle peut cependant être utilisée avec n'importe quel ensemble de formules, puisque la propriété 1 nous assure que pour toute formule A, il existe une conjonction de clauses équivalente à A. Elle peut de plus être utilisée pour montrer la validité d'une formule puisque A est valide si et seulement si $\neg A$ est insatisfiable.

La méthode de résolution repose sur l'équivalence suivante :

$$(A \vee p) \wedge (B \vee \neg p) \equiv (A \vee p) \wedge (B \vee \neg p) \wedge (A \vee B)$$

Dans cette équivalence, on ajoute à la conjonction la clause $(A \vee B)$ obtenue par combinaison de $(A \vee p)$ et $(B \vee \neg p)$, le p s'annulant avec le $\neg p$

Définition 5 *Soient* $A \vee p$ *et* $B \vee \neg p$ *deux clauses. La clause* $(A \vee B)$ *est appelée résolvante de* $A \vee p$ *et* $B \vee \neg p$.

Définition 6 *Un arbre de résolution pour un ensemble de clauses* $\mathcal{E}_C = \{C_1, \ldots, C_n\}$ *est un arbre vérifiant les conditions suivantes :*
- *chacune de ses feuilles est étiquetée par une des clauses de* $\mathcal{E}_C$ *;*
- *chacun de ses noeuds qui n'est pas une feuille possède deux fils et est étiqueté par une clause qui est une résultante des clauses étiquetant ses fils ;*
- *la racine est étiquetée par la clause vide* $(\Box)$.

Propriété 2 (Correction de la réfutation par résolution) *S'il existe un arbre de résolution pour un ensemble de clauses* $\mathcal{E}_C$*, alors ces ensemble de clauses est insatisfiable.*

Preuve: On construit une suite d'ensembles $\mathcal{E}_i$ contenant $\mathcal{E}_C$ tels que $\mathcal{E}_{i+1}$ est insatisfiable si et seulement si $\mathcal{E}_i$ l'est.

On pose $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_C$. On construit le reste de la suite en parcourant l'arbre de résolution en commençant par les feuilles et en passant par un noeud seulement si on est déjà passé par ses fils. Chaque fois que l'on passe par un noeud on construit un nouvel ensemble $\mathcal{E}_{i+1}$ à partir de l'ensemble précédent $\mathcal{E}_i$ en y ajoutant la clause étiquetée par le noeud parcouru. On peut remarquer que, par définition des arbres de résolution, cette clause est soit une des clauses de $\mathcal{E}_C$, soit une résultante de deux clauses déjà présentes dans $\mathcal{E}_i$. Comme $(A \vee p) \wedge (B \vee \neg p) \equiv (A \vee p) \wedge (B \vee \neg p) \wedge (A \vee B)$, $\mathcal{E}_{i+1}$ est insatisfiable si et seulement si $\mathcal{E}_\rangle$ l'est.

On peut remarquer que le dernier ensemble contient la clause qui étiquette la racine de l'arbre et qui par définition est la clause vide, qui vaut toujours F par rapport à n'importe quelle interprétation. Ce dernier ensemble de clauses est par conséquent insatisfiable, ce qui signifie que l'ensemble $\mathcal{E}_C$ est insatisfiable. $\Box$