

LIF11 - TD1

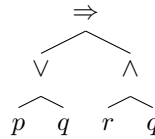
Correction

Exercice 1:

Pour chacune des formules suivantes, dessiner son arbre de syntaxe abstraite.

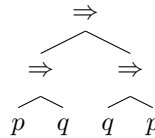
- $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge q)$

Correction:



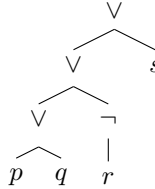
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

Correction:



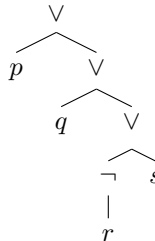
- $((p \vee q) \vee (\neg r)) \vee s$

Correction:



- $(p \vee (q \vee ((\neg r) \vee s)))$

Correction:



Exercice 2:

- Donner une définition de "l'ensemble des variables d'une formule".

Correction: On définit cet ensemble par la fonction $Var(A)$ définie inductivement par:

- $Var(\top) = Var(\perp) = \emptyset$
- $Var(p) = \{p\}$ si p est une variable propositionnelle
- $Var(\neg A) = Var(A)$
- $Var(A \square B) = Var(A) \cup Var(B)$ où \square peut-être \vee , \wedge , \Rightarrow ou \Leftrightarrow

- Montrer que si, pour toutes les variables p d'une formule A , $I_1(p) = I_2(p)$ alors $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$.

Correction: Par induction sur A .

- Soit A et B deux formules. Soit P_A et P_B leurs ensembles de variables respectifs. Si P_A et P_B sont disjoints, que peut-on dire sur la satisfiabilité de $A \wedge B$ par rapport à celle de A et de B et pourquoi?

Correction: $A \wedge B$ est satisfiable si et seulement si A et B sont satisfiables:

– Si $A \wedge B$ est satisfiable, alors il existe une interprétation I telle que $[A \wedge B]_I = V$. Par ailleurs $[A \wedge B]_I = f_\wedge([A]_I, [B]_I)$. D'après la table de vérité de f_\wedge cela signifie que $[A]_I = V$ et $[B]_I = V$. Donc A et B sont satisfiables.

– Si A et B sont satisfiables, il existe I_A telle que $[A]_{I_A} = V$ et il existe I_B telle que $[B]_{I_B} = V$. Soit l'interprétation I_{AB} définie comme suit:

* $I_{AB}(p) = I_A(p)$ si p est une variable de A

* $I_{AB}(p) = I_B(p)$ si p n'est pas une variable de A (en particulier pour les variables de B car $Var(A) \cap Var(B) = \emptyset$).

D'après la question précédente $[A]_{I_{AB}} = [A]_{I_A} = V$ et $[B]_{I_{AB}} = [B]_{I_B} = V$. Donc $[A \wedge B]_{I_{AB}} = f_\wedge([A]_{I_{AB}}, [B]_{I_{AB}}) = V$. Donc $A \wedge B$ est satisfiable.

- Peut-on faire la même déduction si P_A et P_B ne sont pas disjoints? Donner un exemple.

Correction: Si A et B sont satisfiables mais n'ont pas un ensemble de variables disjoints, on a pas forcément $A \wedge B$ satisfiable: prendre $A = p$ et $B = \neg p$.

Exercice 3:

- Etant donné deux interprétations différentes définies sur le même ensemble de variables, dire s'il est possible de trouver une formule qui permet de les distinguer.

Correction: Si I_1 et I_2 sont différentes, mais définies sur le même domaine, il existe une variable p telle que $I_1(p) \neq I_2(p)$. La formule est tout simplement p .

- Soit deux interprétations I_1 et I_2 pour un ensemble de variables P . Si $I_1 \neq I_2$, est-il possible de trouver une formule A telle que $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$?

Correction: Prendre par exemple $A = \top$

- Etant donnée une formule A ayant pour ensemble de variables V_A et V un ensemble de variables tel que $V_A \subset V$. Soit deux interprétations différentes I_1 et I_2 définies pour V . Donner une condition suffisante pour que $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$.

Correction: Il suffit que pour toutes les variables $p \in Var(A)$, $I_1(p) = I_2(p)$.

- En déduire le nombre maximal d'interprétations à examiner pour déterminer si une formule A est satisfiable.

Correction: D'après ce qui précède, il n'est pas nécessaire d'examiner une interprétation si on a déjà examiné une autre interprétation dont la valeur pour les variables de A est la même. Le nombre d'interprétations à examiner correspond au nombre de combinaisons de valeurs possibles pour les variables soit $2^{|Var(A)|}$

Exercice 4:

Considérons les formules suivantes:

- $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
- $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
- $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$

Pour chacune de ces formules:

1. Donner l'ensemble de ses sous-formules.
2. Donner la table de vérité de la formule.
3. Dire si la formule est satisfiable et/ou valide.

Correction: Les sous-formules sont entêtes des colonnes du tableau.

- $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$	
1	1	0	0	0	0	0	← non valide
1	0	0	1	1	0	1	← satisfiable
0	1	1	0	0	1	1	
0	0	1	1	0	0	0	

- $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$	$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

La formule s'évalue toujours à vrai (1), donc elle est satisfiable et valide.

- $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$	
1	1	1	1	0	1	0	← non valide
1	1	0	1	0	1	0	
1	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	0	0	1	0	
0	1	1	1	1	1	1	← satisfiable
0	1	0	1	1	0	0	
0	0	1	1	1	1	1	
0	0	0	1	1	0	0	

Exercice 5:

Montrer les équivalences suivantes en comparant la valeur des formules par rapport aux différentes interprétations possibles:

- $(p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q)) \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv p \text{ xor } q$

Correction:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))$	$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0

Les deux dernières colonnes ont mêmes valeurs dont l'équivalence est vérifiée.

- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \equiv p$

Correction:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

La première et la dernière colonne ont mêmes valeurs donc l'équivalence est vérifiée.

- $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

Correction:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

La cinquième et la dernière colonnes ont mêmes valeurs donc l'équivalence est vérifiée.

Exercice 6: Principe de substitution

Montrer que si $A \equiv B$ et si A est une sous-formule de C , alors la formule C' , obtenue en remplaçant une occurrence de A par B dans C , est équivalente à C . On pourra utiliser la remarque suivante: $A_1 \equiv A_2$ si et seulement si, pour toute interprétation I , $[A_1]_I = [A_2]_I$.

Correction:

On veut montrer que si $A \equiv B$ et si A est une sous-formule de C , alors la formule C' obtenue en remplaçant une occurrence de A par B dans C est équivalente à C .

La démonstration se fait par induction sur C .

- Si $A = C$, alors $C' = B$, et comme $A \equiv B$, on en déduit $C \equiv C'$. On peut remarquer que si C est atomique, alors $sf(C) = \{C\}$ et donc que l'on a nécessairement $A = C$.
- Si $A \neq C$ alors, d'après ce qui précède, C est de la forme $\neg E$ ou $E_1 \Box E_2$, avec $\Box \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.
 - Si $C = \neg E$, alors $C' = \neg E'$, avec E' obtenu en remplaçant une occurrence de A par B dans E . Soit I une interprétation. Par hypothèse d'induction, $E \equiv E'$, donc $[E]_I \equiv [E']_I$. On en déduit $[C']_I = f_{\neg}([E']_I) = f_{\neg}([E]_I) = [C]_I$. Comme I est quelconque, on en déduit que c'est vrai pour toute interprétation, et donc que $C \equiv C'$.
 - Si $C = E_1 \Box E_2$ alors soit l'occurrence de A est remplacée dans E_1 , soit elle l'est dans E_2 . Supposons qu'elle le soit dans E_1 (la démonstration est similaire dans le cas où elle est remplacée dans E_2). On a alors $C' = E'_1 \Box E_2$, avec E'_1 obtenu à partir de E_1 en remplaçant une occurrence de A par B . Soit I une interprétation. Par hypothèse d'induction, $E_1 \equiv E'_1$, donc $[E_1]_I = [E'_1]_I$. On en déduit $[C']_I = f_{\Box}([E'_1]_I, [E_2]_I) = f_{\Box}([E_1]_I, [E_2]_I) = [C]_I$. Comme I est quelconque, on en déduit que c'est vrai pour toute interprétation, et donc que $C \equiv C'$.

Exercice 7:

En utilisant les équivalences remarquables, réécrire les formules suivantes en n'utilisant que les connecteurs \neg et \wedge :

- $p \Leftrightarrow (q \vee r)$

Correction: On utilise $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, $A \Rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$, $\neg\neg A \equiv A$ et $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$.

$$\begin{aligned} p \Leftrightarrow (q \vee r) &\equiv (p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge ((q \vee r) \Rightarrow p) \\ &\equiv \neg(p \wedge \neg(q \vee r)) \wedge \neg((q \vee r) \wedge \neg p) \\ &\equiv \neg(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg(\neg q \wedge \neg r) \wedge \neg p) \end{aligned}$$

- $p \vee (q \Rightarrow p)$

Correction:

$$\begin{aligned} p \vee (q \Rightarrow p) &\equiv p \vee \neg(q \wedge \neg p) \\ &\equiv \neg(\neg p \wedge q \wedge \neg p) \end{aligned}$$

Exercice 8:

Quel est le nombre des différentes fonctions booléennes à deux arguments, à trois arguments, à n arguments?

Correction: Le nombre de fonctions booléennes à n arguments est 2^{2^n} . On le montre par récurrence sur n :

- cas $n = 0$: c'est le cas des constantes, il y en a 2 (0 et 1). On a bien $2^{2^0} = 2^1 = 2$.
- cas $n = 1$: Il y a 4 fonctions booléennes à 1 argument, qui sont énumérées dans le tableau suivant:

b	f_{\top}	id	f_{\neg}	f_{\perp}
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

- Supposons que le nombre de fonctions booléennes à n arguments soit bien 2^{2^n} et montrons que le nombre de fonctions booléennes à $n + 1$ arguments est $2^{2^{n+1}}$. On peut remarquer qu'étant donné une fonction booléenne f à $n + 1$ arguments, on peut définir deux fonctions f_a et f_b à n arguments comme suit:

- $f_a(b_1, \dots, b_n) = f(b_1, \dots, b_n, 0)$
- $f_b(b_1, \dots, b_n) = f(b_1, \dots, b_n, 1)$

De même f peut être redéfinie en utilisant f_a et f_b :

$$f(b_1, \dots, b_n, b_{n+1}) = \begin{cases} f_a(b_1, \dots, b_n) & \text{si } b_{n+1} = 0 \\ f_b(b_1, \dots, b_n) & \text{si } b_{n+1} = 1 \end{cases}$$

Pour énumérer les fonctions à $n + 1$ arguments, il suffit d'énumérer les combinaisons de deux fonctions booléennes à n arguments, soit $2^{2^n} \times 2^{2^n} = 2^{2^n + 2^n} = 2^{2^{n+1}}$.

¹Ce cas peut être démontré directement en utilisant le cas récurrent.

Exercice 9:

Montrer que:

1. Une formule A est valide si et seulement si $\neg A$ n'est pas satisfiable.

Correction: Si A est valide, alors pour toute interprétation I , $[A]_I = V$. Regardons $[\neg A]_I$: $[\neg A]_I = f_{\neg}([A]_I) = f_{\neg}(V) = F$. Donc pour toute interprétation I , $[\neg A]_I = F$. Donc il n'y a aucune interprétation I telle que $[\neg A]_I = V$. Donc $\neg A$ n'est pas satisfiable.

Si $\neg A$ n'est pas satisfiable, alors pour toute interprétation I , $[\neg A]_I = F$. Or $[\neg A]_I = f_{\neg}([A]_I)$. Donc on a forcément $[A]_I = V$. Donc A est valide.

2. $A_1, \dots, A_n \models B$ si et seulement si $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide (noté $\models A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$).

Correction:

Si $A_1, \dots, A_n \models B$ alors pour toute interprétation I : si $[A_1]_I = V$ et ... et $[A_n]_I = V$ alors $[B]_I = V$. En regardant la table de vérité de f_{\wedge} , on peut remarquer que $[A_1]_I = V$ et ... et $[A_n]_I = V$ si et seulement si $[A_1 \wedge \dots \wedge A_n]_I = V$. Posons $A = A_1 \wedge \dots \wedge A_n$. D'après la table de vérité de f_{\Rightarrow} , la seule possibilité pour que $[A \Rightarrow B]_I = F$ est que $[A]_I = V$ et $[B]_I = F$. Or cette possibilité est contradictoire avec le fait que si $[A]_I = V$ alors $[B]_I = V$. On en déduit que $[A \Rightarrow B]_I = V$. Comme ce raisonnement est valable quelque soit I , on obtient que $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide.

Si $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide, alors pour toute interprétation I , $[A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B]_I = V$. D'après la table de vérité de f_{\Rightarrow} , on en déduit que si $[A_1 \wedge \dots \wedge A_n]_I = V$, alors $[B]_I = V$. En regardant la table de vérité de f_{\wedge} , on peut remarquer que $[A_1]_I = V$ et ... et $[A_n]_I = V$ si et seulement si $[A_1 \wedge \dots \wedge A_n]_I = V$. On en déduit donc que si $[A_1]_I = V$ et ... et $[A_n]_I = V$ alors $[B]_I = V$. Comme ce raisonnement est valable pour toute interprétation I , on en déduit que $A_1, \dots, A_n \models B$.

3. $\{A_1, \dots, A_n\} \models B$ si et seulement si $\{A_1, \dots, A_n, \neg B\}$ n'est pas satisfiable.

Correction:

D'après ce qui précède, $A_1, \dots, A_n \models B$ si et seulement si $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide.

Récrivons la formule $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$:

$$\begin{aligned} A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B &\equiv \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \vee B \\ &\equiv \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B \\ &\equiv \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B) \end{aligned}$$

Donc $\neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B) \equiv A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$.

D'après le premier point, on déduit que $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide si et seulement si $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$ n'est pas satisfiable, c'est-à-dire si et seulement si $\{A_1, \dots, A_n, \neg B\}$ est insatisfiable.