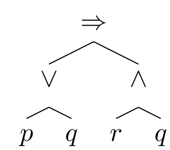
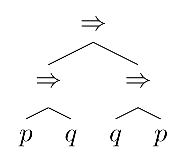
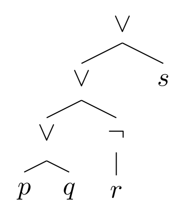
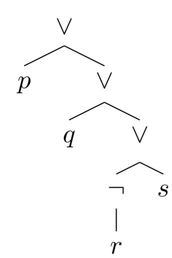
LIF11 - TD1
Correction

Exercice 1:

Pour chacune des formules suivantes, dessiner son arbre de syntaxe abstraite.

- $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge q)$
  Correction:
  
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
  Correction:
  
- $(((p \vee q) \vee (\neg r)) \vee s)$
  Correction:
  
- $(p \vee (q \vee ((\neg r) \vee s)))$
  Correction:
  

Exercice 2:

- Donner une définition de "*l'ensemble des variables d'une formule*".
  Correction: On définit cet ensemble par la fonction $Var(A)$ définie inductivement par:
  - $Var(\top) = Var(\bot) = \emptyset$
  - $Var(p) = \{p\}$ si p est une variable propositionnelle
  - $Var(\neg A) = Var(A)$
  - $Var(A \Box B) = Var(A) \cup Var(B)$ où $\Box$ peut-être $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$

- Montrer que si, pour toutes les variables p d'une formule A, $I_1(p) = I_2(p)$ alors $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$.

  Correction: Par induction sur A.

- Soit A et B deux formules. Soit P_A et P_B leurs ensembles de variables respectifs. Si P_A et P_B sont disjoints, que peut-on dire sur la satisfiabilité de $A \wedge B$ par rapport à celle de A et de B et pourquoi?

  Correction: $A \wedge B$ est satisfiable si et seulement si A et B sont satisfiables:

  - Si $A \wedge B$ est satisfiable, alors il existe une interprétation I telle que $[A \wedge B]_I = V$. Par ailleurs $[A \wedge B]_I = f_\wedge([A]_I, [B]_I)$. D'après la table de vérité de $f_\wedge$ cela signifie que $[A]_I = V$ et $[B]_I = V$. Donc A et B sont satifiables.
  - Si A et B sont satisfiables, il existe I_A telle que $[A]_{I_A} = V$ et il existe I_B telle que $[B]_{I_B} = V$. Soit l'interprétation I_{AB} définie comme suit:
    * $I_{AB}(p) = I_A(p)$ si p est une variable de A
    * $I_{AB}(p) = I_B(p)$ si p n'est pas une variable de A (en particulier pour les variables de B car $Var(A) \cap Var(B) = \emptyset$).

    D'après la question précédente $[A]_{I_{AB}} = [A]_{I_A} = V$ et $[B]_{I_{AB}} = [B]_{I_B} = V$. Donc $[A \wedge B]_{I_{AB}} = f_\wedge([A]_{I_{AB}}, [B]_{I_{AB}}) = V$. Donc $A \wedge B$ est satisfiable.

- Peut-on faire la même déduction si P_A et P_B ne sont pas disjoints? Donner un exemple.

  Correction: Si A et B sont satisfiables mais n'ont pas un ensemble de variables disjoints, on a pas forcément $A \wedge B$ satisfiable: prendre $A = p$ et $B = \neg p$.

Exercice 3:

- Etant donné deux interprétations différentes définies sur le même ensemble de variables, dire s'il est possible de trouver une formule qui permet de les distinguer.

  Correction: Si I_1 et I_2 sont différentes, mais définies sur le même domaine, il existe une variable p telle que $I_1(p) \neq I_2(p)$. La formule est tout simplement p.

- Soit deux interprétations I_1 et I_2 pour un ensemble de variables P. Si $I_1 \neq I_2$, est-il possible de trouver une formule A telle que $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$?

  Correction: Prendre par exemple $A = \top$

- Etant donnée une formule A ayant pour ensemble de variables V_A et V un ensemble de variables tel que $V_A \subset V$. Soit deux interprétations différentes I_1 et I_2 définies pour V. Donner une condition suffisante pour que $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$.

  Correction: Il suffit que pour toutes les variables $p \in Var(A)$, $I_1(p) = I_2(p)$.

- En déduire le nombre maximal d'interprétations à examiner pour déterminer si une formule A est satisfiable.

  Correction: D'après ce qui précède, il n'est pas nécessaire d'examiner une interprétation si on a déjà examiné une autre interprétation dont la valeur pour les variables de A est la même. Le nombre d'interprétations à examiner correspond au nombre de combinaisons de valeurs possibles pour les variables soit $2^{|Var(A)|}$

Exercice 4:

Considérons les formules suivantes:

- $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
- $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
- $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$

Pour chacune de ces formules:

1. Donner l'ensemble de ses sous-formules.
2. Donner la table de vérité de la formule.
3. Dire si la formule est satisfiable et/ou valide.

Correction: Les sous-formules sont entêtes des colonnes du tableau.

- $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$	
1	1	0	0	0	0	0	← non valide
1	0	0	1	1	0	1	← satisfiable
0	1	1	0	0	1	1	
0	0	1	1	0	0	0	

- $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$	$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

  La formule s'évalue toutjours à vrai (1), donc elle est satisfiable et valide.

- $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$	
1	1	1	1	0	1	1	
1	1	0	1	0	1	1	
1	0	1	0	0	1	0	← non valide
1	0	0	0	0	1	0	
0	1	1	1	1	1	1	← satisfiable
0	1	0	1	1	0	0	
0	0	1	1	1	1	1	
0	0	0	1	1	0	0	

Exercice 5:

Montrer les équivalences suivantes en comparant la valeur des formules par rapport aux différentes interprétations possibles:

- $(p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q)) \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ $(\equiv p \ \texttt{xor} \ q)$

  Correction:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))$	$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0

  Les deux dernières colonnes ont mêmes valeurs dont l'équivalence est vérifiée.

- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \equiv p$

  Correction:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

  La première et la dernière colonne ont mêmes valeurs donc l'équivalence est vérifiée.

- $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

  Correction:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

  La cinquième et la dernière colonnes ont mêmes valeurs donc l'équivalence est vérifiée.

Exercice 6: Principe de substitution

Montrer que si $A \equiv B$ et si A est une sous-formule de C, alors la formule C', obtenue en remplaçant une occurrence de A par B dans C, est équivalente à C. On pourra utiliser la remarque suivante: $A_1 \equiv A_2$ si et seulement si, pour toute interprétation I, $[A_1]_I = [A_2]_I$.

Correction:

On veut montrer que si $A \equiv B$ et si A est une sous-formule de C, alors la formule C' obtenue en remplaçant une occurrence de A par B dans C est équivalente à C.

La démonstration se fait par induction sur C.

- Si $A = C$, alors $C' = B$, et comme $A \equiv B$, on en déduit $C \equiv C'$. On peut remarquer que si C est atomique, alors $sf(C) = \{C\}$ et donc que l'on a nécessairement $A = C$.
- Si $A \neq C$ alors, d'après ce qui précède, C est de la forme $\neg E$ ou $E_1 \boxdot E_2$, avec $\boxdot \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.
  - Si $C = \neg E$, alors $C' = \neg E'$, avec E' obtenu en remplaçant une occurrence de A par B dans E. Soit I une interprétation. Par hypothèse d'induction, $E \equiv E'$, donc $[E]_I \equiv [E']_I$. On en déduit $[C']_I = f_\neg([E']_I) = f_\neg([E]_I) = [C]_I$. Comme I est quelconque, on en déduit que c'est vrai pour toute interprétation, et donc que $C \equiv C'$.
  - Si $C = E_1 \boxdot E_2$ alors soit l'occurrence de A est remplacée dans E_1, soit elle l'est dans E_2. Supposons qu'elle le soit dans E_1 (la démonstration est similaire dans le cas où elle est remplacée dans E_2). On a alors $C' = E_1' \boxdot E_2$, avec E_1' obtenu à partir de E_1 en remplaçant une occurrence de A par B. Soit I une interprétation. Par hypothèse d'induction, $E_1 \equiv E_1'$, donc $[E_1]_I = [E_1']_I$. On en déduit $[C']_I = f_\boxdot([E_1']_I, [E_2]_I) = f_\boxdot([E_1]_I, [E_2]_I) = [C]_I$. Comme I est quelconque, on en déduit que c'est vrai pour toute interprétation, et donc que $C \equiv C'$.

Exercice 7:

En utilisant les équivalences remarquables, réécrire les formules suivantes en n'utilisant que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$:

- $p \Leftrightarrow (q \vee r)$

  Correction: On utilise $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, $A \Rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$, $\neg\neg A \equiv A$ et $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$.

$$\begin{array}{rcl} p \Leftrightarrow (q \vee r) & \equiv & (p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge ((q \vee r) \Rightarrow p) \\ & \equiv & \neg(p \wedge \neg(q \vee r)) \wedge \neg((q \vee r) \wedge \neg p) \\ & \equiv & \neg(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg(\neg q \wedge \neg r) \wedge \neg p) \end{array}$$

- $p \vee (q \Rightarrow p)$

  Correction:

$$\begin{array}{rcl} p \vee (q \Rightarrow p) & \equiv & p \vee \neg(q \wedge \neg p) \\ & \equiv & \neg(\neg p \wedge q \wedge \neg p) \end{array}$$

Exercice 8:

Quel est le nombre des différentes fonctions booléennes à deux arguments, à trois arguments, à n arguments?

Correction: Le nombre de fonctions booléennes à n arguments est 2^{2^n}. On le montre par récurrence sur n:

- cas $n = 0$: c'est le cas des constantes, il y en a 2 (0 et 1). On a bien $2^{2^0} = 2^1 = 2$.
- cas [1] $n = 1$: Il y a 4 fonctions booléennes à 1 argument, qui sont énumérées dans le tableau suivant:

b	$f_\top$	id	$f_\neg$	$f_\bot$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

- Supposons que le nombre de fonctions booléennes à n arguments soit bien 2^{2^n} et montrons que le nombre de fonctions booléennes à $n+1$ arguments est $2^{2^{n+1}}$. On peut remarquer qu'étant donner une fonction booléenne f à $n+1$ arguments, on peut définir deux fonctions f_a et f_b à n arguments comme suit:

  - $f_a(b_1, \ldots, b_n) = f(b_1, \ldots, b_n, 0)$
  - $f_b(b_1, \ldots, b_n) = f(b_1, \ldots, b_n, 1)$

  De même f peut être redéfinie en utilisant f_a et f_b:

$$f(b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}) = \begin{cases} f_a(b_1, \ldots, b_n) & \text{si } b_{n+1} = 0 \\ f_b(b_1, \ldots, b_n) & \text{si } b_{n+1} = 1 \end{cases}$$

  Pour énumérer les fonctions à $n+1$ arguments, il suffit d'énumérer les combinaisons de deux fonctions booléennes à n arguments, soit $2^{2^n} \times 2^{2^n} = 2^{2^n + 2^n} = 2^{2^{n+1}}$.

[1] Ce cas peut être démontré directement en utilisant le cas récurrent.

Exercice 9:

Montrer que:

1. Une formule A est valide si et seulement si $\neg A$ n'est pas satisfiable.

   Correction: Si A est valide, alors pour toute interprétation I, $[A]_I = V$. Regardons $[\neg A]_I$: $[\neg A]_I = f_\neg([A]_I) = f_\neg(V) = F$. Donc pour toute interprétation I, $[\neg A]_I = F$. Donc il n'y a aucune interprétation I telle que $[\neg A]_I = V$. Donc $\neg A$ n'est pas satisfiable.

   Si $\neg A$ n'est pas satisfiable, alors pour toute interprétation I, $[\neg A]_I = F$. Or $[\neg A]_I = f_\neg([A]_I)$. Donc on a forcément $[A]_I = V$. Donc A est valide.

2. $A_1, \ldots, A_n \models B$ si et seulement si $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide (noté $\models A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$).

   Correction:

   Si $A_1, \ldots, A_n \models B$ alors pour toute interprétation I: si $[A_1]_I = V$ et ... et $[A_n]_I = V$ alors $[B]_I = V$. En regardant la table de vérité de $f_\wedge$, on peut remarquer que $[A_1]_I = V$ et ... et $[A_n]_I = V$ si et seulement si $[A_1 \wedge \cdots \wedge A_n]_I = V$. Posons $A = A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$. D'après la table de vérité de $f_\Rightarrow$, la seule possibilité pour que $[A \Rightarrow B]_I = F$ est que $[A]_I = V$ et $[B]_I = F$. Or cette possibilité est contradictoire avec le fait que si $[A]_I = V$ alors $[B]_I = V$. On en déduit que $[A \Rightarrow B]_I = V$. Comme ce raisonnement est valable quelque soit I, on obtient que $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide.

   Si $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide, alors pour toute interprétation I, $[A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B]_I = V$. D'après la table de vérité de $f_\Rightarrow$, on en déduit que si $[A_1 \wedge \cdots \wedge A_n]_I = V$, alors $[B]_I = V$. En regardant la table de vérité de $f_\wedge$, on peut remarquer que $[A_1]_I = V$ et ... et $[A_n]_I = V$ si et seulement si $[A_1 \wedge \cdots \wedge A_n]_I = V$. On en déduit donc que si $[A_1]_I = V$ et ... et $[A_n]_I = V$ alors $[B]_I = V$. Comme ce raisonnement est valable pour toute interprétation I, on en déduit que $A_1, \ldots, A_n \models B$.

3. $\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$ si et seulement si $\{A_1, \ldots, A_n, \neg B\}$ n'est pas satisfiable.

   Correction:

   D'après ce qui précède, $A_1, \ldots, A_n \models B$ si et seulement si $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide.

   Réécrivons la formule $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$:

$$
\begin{array}{rcl}
A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B & \equiv & \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \vee B \\
& \equiv & \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n \vee B \\
& \equiv & \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B)
\end{array}
$$

   Donc $\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B) \equiv A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B$.

   D'après le premier point, on déduit que $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide si et seulement si $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B$ n'est pas satisfiable, c'est-à-dire si et seulement si $\{A_1, \ldots, A_n, \neg B\}$ est insatisfiable.