LIF11 - TD2
Correction

Exercice 1:

Un prisonnier doit choisir entre deux cellules dont l'une cache une princesse et l'autre un tigre. S'il choisit la princesse, il doit l'épouser, mais s'il tombe sur le tigre, il est dévoré. A noter que les deux cellules peuvent contenir un tigre, ou les deux cellules une princesse.

Sur l'une des portes (la porte A), l'affiche indique: "Il y a une princesse dans cette cellule et un tigre dans l'autre"; sur la deuxième porte (la porte B), il est écrit: "Il y a une princesse dans une cellule et il y a un tigre dans une cellule". Il faut encore noter qu'une affiche dit la vérité et que l'autre ment. Ecrire une formule qui permet de représenter la situation et en déduire quelle porte le prisonnier doit ouvrir (*i.e.* ce qu'il y a dans chacune de ces cellules).

Correction: On introduit une variable p_A (resp. p_B) qui vaudra vrai si la cellule A (resp. B) contient une princesse. la première affiche se traduit par $p_A \wedge \neg p_B$. La seconde se traduit par $(p_A \vee p_B) \wedge (\neg p_A \vee \neg p_B)$. L'énoncé se traduit donc par $\neg(p_A \wedge \neg p_B) \Leftrightarrow ((p_A \vee p_B) \wedge (\neg p_A \vee \neg p_B))$, formule que l'on cherche à rendre vraie. Il suffit de prendre une interprétation I telle que $I(p_A) = F$ et $I(p_B) = V$, c'est à dire qu'il y a une princesse dans la cellule B et un tigre dans la cellule A. □

Variation: l'affiche de la cellule A dit la vérité s'il y a une princesse dans la cellule A, elle ment s'il y a un tigre. Pour la cellule B, c'est l'inverse: s'il y a un tigre, elle dit la vérité, s'il y a une princesse, elle ment. Voici donc les deux affiches. L'une dit: "Les deux cellules contiennent des tigres" et l'autre: "Cette cellule contient un tigre". Quelle porte choisir?

Correction: On ne sait pas sur quelle porte est collée quelle affiche. On introduit donc une variable p_{cell} qui vaudra vrai si la première affiche est collée sur la cellule A et faux sinon. Dans le cas où la première affiche est collée sur la cellule A, la formule suivante traduit la situation: $(p_A \Leftrightarrow (\neg p_A \wedge \neg p_B)) \wedge (\neg p_B \Leftrightarrow \neg p_B)$. S la première affiche est collée sur la deuxième cellule, on obtient: $(p_A \Leftrightarrow \neg p_A) \wedge (\neg p_B \Leftrightarrow (\neg p_A \wedge \neg p_B))$. La formule totale représentant la situation est donc $(p_{cell} \Rightarrow (p_A \Leftrightarrow (\neg p_A \wedge \neg p_B)) \wedge (\neg p_B \Leftrightarrow \neg p_B)) \wedge \neg p_{cell} \Rightarrow (p_A \Leftrightarrow \neg p_A) \wedge (\neg p_B \Leftrightarrow (\neg p_A \wedge \neg p_B))$. Il faut prendre comme interprétation I: $I(p_A) = F$, $I(p_B) = V$ et $p_{cell} = V$ (ce qui peut être obtenu soit avec un calcul de table de vérité, soit en réfléchissant directement sur les formules).

Exercice 2:

Pour chacune des fonctions f_1 et f_2, donner une formule qui la réalise. On pourra éventuellement pour cela suivre la méthode suggérée à travers la démonstration du fait que $\{\top, \bot, \neg, \wedge, \Rightarrow, \vee\}$ est fonctionnellement complet.

x	y	z	$f_1(x, y, z)$	$f_2(x, y, z)$
V	V	V	V	F
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

Correction: On décompose f_1 en deux fonctions à 2 arguments $f_1^1(y, z) = f_1(V, y, z)$ et $f_1^2(y, z) = f_1(F, y, z)$. On recommence l'opération avec f_1^1 décomposée en f_1^{11} et f_1^{12} et f_1^1

décomposée en f_1^{21} et f_1^{22}. On en donne également une version simplifiée obtenue en utilisant à chaque étape des équivalences remarquables. On procède de la même manière pour f_2

Fonction	Formule	Formule simplifiée
f_1^{11}	$(p_z \Rightarrow \top) \wedge (\neg p_z \Rightarrow \top)$	$\top$
f_1^{12}	$(p_z \Rightarrow \bot) \wedge (\neg p_z \Rightarrow \top)$	$\neg p_z$
f_1^{21}	$(p_z \Rightarrow \bot) \wedge (\neg p_z \Rightarrow \bot)$	$\bot$
f_1^{21}	$(p_z \Rightarrow \top) \wedge (\neg p_z \Rightarrow \bot)$	p_z
f_1^1	$(p_y \Rightarrow \top) \wedge (\neg p_y \Rightarrow \neg p_z)$	$p_z \Rightarrow p_y$
f_1^2	$(p_y \Rightarrow \bot) \wedge (\neg p_y \Rightarrow p_z)$	$\neg(p_z \Rightarrow p_y)$
f_1	$(p_x \Rightarrow (p_z \Rightarrow p_y)) \wedge (\neg p_x \Rightarrow \neg(p_z \Rightarrow p_y))$	$p_x \Leftrightarrow (p_z \Rightarrow p_y)$
f_2^{11}	$(p_z \Rightarrow \bot) \wedge (\neg p_z \Rightarrow \bot)$	$\bot$
f_2^{12}	$(p_z \Rightarrow \bot) \wedge (\neg p_z \Rightarrow \top)$	$\neg p_z$
f_2^{21}	$(p_z \Rightarrow \bot) \wedge (\neg p_z \Rightarrow \top)$	$\neg p_z$
f_2^{21}	$(p_z \Rightarrow \bot) \wedge (\neg p_z \Rightarrow \bot)$	$\bot$
f_2^1	$(p_y \Rightarrow \bot) \wedge (\neg p_y \Rightarrow \neg p_z)$	$\neg p_y \wedge \neg p_z$
f_2^2	$(p_y \Rightarrow \neg p_z) \wedge (\neg p_y \Rightarrow \bot)$	$p_y \wedge \neg p_z$
f_2	$(p_x \Rightarrow (\neg p_y \wedge \neg p_z)) \wedge (\neg p_x \Rightarrow (p_y \wedge \neg p_z))$	$\neg p_x \wedge \neg(p_x \Leftrightarrow p_y)$

Exercice 3:

Soient les substitutions suivantes:

- $\sigma_1 = [^{u\vee v}/_p, ^{u\Rightarrow v}/_q]$
- $\sigma_2 = [^{u\Leftrightarrow\neg v}/_p, ^{v\wedge u}/_q, ^{\neg(u\vee v)}/_r]$
- $\sigma_3 = [^{v}/_p, ^{u\wedge v}/_q, ^{u}/_r]$

Donner le résultat de l'application de σ_1, σ_2 et σ_3 sur les formules suivantes:

- $A = (p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q$

  Correction:
  $A\sigma_1 = ((u \vee v) \wedge \neg(u \Rightarrow v)) \vee \neg(u \vee v) \vee (u \Rightarrow v)$
  $A\sigma_2 = ((u \Leftrightarrow \neg v) \wedge \neg(v \wedge u)) \vee \neg(u \Leftrightarrow \neg v) \vee (v \wedge u)$
  $A\sigma_3 = (v \wedge \neg(u \wedge v)) \vee \neg v \vee (u \wedge v)$

- $B = (p \vee q \vee r)$

  Correction:
  $B\sigma_1 = ((u \vee v) \vee (u \Rightarrow v) \vee r)$
  $B\sigma_2 = ((u \Leftrightarrow \neg v) \vee (v \wedge u) \vee (\neg(u \vee v)))$
  $B\sigma_3 = ((v) \vee (u \wedge v) \vee (u))$

- $C = (r \Rightarrow (p \vee q)) \wedge (p \Leftrightarrow q \wedge r)$

  Correction:
  $C\sigma_1 = (r \Rightarrow ((u \vee v) \vee (u \Rightarrow v))) \wedge ((u \vee v) \Leftrightarrow (u \Rightarrow v) \wedge r)$
  $C\sigma_2 = ((\neg(u \vee v)) \Rightarrow ((u \Leftrightarrow \neg v) \vee (v \wedge u))) \wedge ((u \Leftrightarrow \neg v) \Leftrightarrow (v \wedge u) \wedge (\neg(u \vee v)))$
  $C\sigma_3 = (u \Rightarrow (v \vee (u \wedge v))) \wedge (v \Leftrightarrow (u \wedge v) \wedge u)$

Donner la table de vérité des formules qui apparaissent dans σ_1, σ_2 et σ_3, ainsi que celle des formules A, B et C.
Correction:

u	v	$u \vee v (p\sigma_1)$	$u \Rightarrow v (q\sigma_1)$	$u \Leftrightarrow \neg v (p\sigma_2)$	$v \wedge u (q\sigma_2)$	$\neg(u \vee v)(r\sigma_2)$	$v (p\sigma_3)$	$u \wedge v (q\sigma_3)$	$u (r\sigma_3)$
V	V	V	V	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	F	V	F	F
F	F	F	V	F	F	V	F	F	F

p	q	$(p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

p	q	r	$p \vee q \vee r$	$(r \Rightarrow (p \vee q)) \wedge (p \Leftrightarrow q \wedge r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	F
F	F	F	F	V

$\square$

En utilisant les tables de vérité précédentes, donner la table de vérité de $A\sigma_1$, $B\sigma_2$ et $C\sigma_3$.

Correction: On utilise la table de vérité des formules des substitutions pour connaitre la valeur des formules remplaçant p, q et r, puis on utilise les tables de A, B et C avec ces valeurs:

u	v	r	$B\sigma_1$	$C\sigma_1$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	V	V

u	v	$A\sigma_1$	$A\sigma_2$	$B\sigma_2$	$C\sigma_2$	$A\sigma_3$	$B\sigma_3$	$C\sigma_3$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	F
F	V	V	V	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	F	V	F	V

Exercice 4: Additionneur binaire

Un additionneur binaire est un circuit électronique permettant de réaliser des additions sur des entier positifs écrit en base 2. Un additionneur additionnant des nombres codés sur n bits possède $2 \times n$ entrées et $n+1$ sorties (en effet, en binaire $10 + 10 = 100$).

On souhaite vérifier un additionneur binaire en contrôlant ses sorties en fonction de ses entrées. L'additionneur est représenté par $n+1$ formules $A_1, \ldots, A_{n+1}$ ayant $2n$ variables représentant les entrées du circuit et telle que valeur de vérité de A_k correpond à la valeur de la k^{ieme} sortie.

1. Donner la table de vérité de deux fonctions pour l'addition de 3 bits:
   - la première calcule la somme des 3 bits sans retenue (i.e. $1+1+1 \mapsto 1$);
   - la second calcule la retenue de cette somme.

   Correction:

p	q	r	somme	retenue
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

2. Donner deux formules réalisant ces fonctions.

   Correction:
   - somme: $S = p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$
   - retenue: $R = (p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (\neg p \Rightarrow (q \wedge r))$

3. En déduire les formules spécifiant les sorties d'un additionneur 2 bits. On considère que les entier sont représentés avec le bit de poids faible ayant le plus petit indice, que le premier entier est représenté par p_1, p_2 et que le second est représenté par q_1, q_2.

   Correction:
   - $B_1 = p_1 \Leftrightarrow \neg q_1$ (obtenue à partir de la formule pour la somme en replaçant r par $\perp$).
   - On pose $R_1 = p_1 \wedge q_1$ (obtenue à partir de la formule pour la retenue en replaçant r par $\perp$). On a alors $B_2 = S[p_2/p, q_2/q, R_1/r] = p_2 \Leftrightarrow (q_2 \Leftrightarrow (p_1 \wedge q_1))$.
   - $B_3 = R[p_2/p, q_2/q, R_1/r] = (p_2 \Rightarrow (q_2 \vee (p_1 \wedge q_1))) \wedge (\neg p_2 \Rightarrow (q_2 \wedge p_1 \wedge q_1))$.

4. Généraliser la construction précédente pour donner une manière de construire les formules de spécification des sorties d'un additionneur n bits.

   Correction: On construit itérativement les formules B_k et R_k selon le schéma suivant:
   - $B_1 = p_1 \Leftrightarrow \neg q_1$
   - $R_1 = p_1 \wedge q_1$
   - $B_k = S[p_k/p, q_k/q, R_{k-1}/r]$ pour $2 \leq k \leq n$
   - $R_k = R[p_k/p, q_k/q, R_{k-1}/r]$ pour $2 \leq k \leq n+1$
   - $B_{n+1} = R_{n+1}$

5. Expliquer comment on peut utiliser ces formules avec les formules $A_1, \ldots, A_{n+1}$ afin de vérifier que l'additionneur est correct.

   Correction: Il suffit de vérifier que $A_i \equiv B_i$ pour $1 \leq i \leq n+1$.

Exercice 5:

Démontrer que les séquents suivants sont corrects en utilisant le système $\mathcal{G}$ puis en utilisant le système $\mathcal{LK}$:

- $(p \Rightarrow q) \wedge p \vdash q$
- $\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
- $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$
- $\vdash p \vee (q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Correction:

- $(p \Rightarrow q) \wedge p \vdash q$
  Système $\mathcal{G}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash q, p}(Ax) \qquad \dfrac{}{p, q \vdash q}(Ax)}{p \Rightarrow q, p \vdash q}(\Rightarrow_G)}{(p \Rightarrow q) \wedge p \vdash q}(\wedge_G)$$

  Système $\mathcal{LK}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}(Id) \qquad \dfrac{}{q \vdash q}(Id)}{p \Rightarrow q, p \vdash q}(\Rightarrow_G)}{p \Rightarrow q, (p \Rightarrow q) \wedge p \vdash q}(\wedge_G^2)}{(p \Rightarrow q) \wedge p, (p \Rightarrow q) \wedge p \vdash q}(\wedge_G^1)}{(p \Rightarrow q) \wedge p \vdash q}(C_G)$$

- $\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
  Système $\mathcal{G}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash q, p}(Ax)}{\vdash p \Rightarrow q, p}(\Rightarrow_D) \qquad \dfrac{}{p \vdash p}(Ax)}{(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \vdash p}(\Rightarrow_G)}{\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p}(\Rightarrow_D)$$

  Système $\mathcal{LK}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}(Id)}{p \vdash q, p}(A_D)}{\vdash p \Rightarrow q, p}(\Rightarrow_D) \qquad \dfrac{}{p \vdash p}(Id)}{(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \vdash p, p}(\Rightarrow_G)}{(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \vdash p}(C_D)}{\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p}(\Rightarrow_D)$$

- $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$
  Système $\mathcal{G}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, q \Rightarrow r \vdash r, p}(Ax) \qquad \dfrac{\dfrac{}{p, q \vdash r, q}(Ax) \qquad \dfrac{}{p, q, r \vdash r}(Ax)}{p, q, q \Rightarrow r \vdash r}(\Rightarrow_G)}{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash r}(\Rightarrow_G)}{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r}(\Rightarrow_D)$$

Système $\mathcal{LK}$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$p \vdash p$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$q \vdash q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$r \vdash r$}
\RightLabel{$(\Rightarrow_G)$}
\BinaryInfC{$q, q \Rightarrow r \vdash r$}
\RightLabel{$(\Rightarrow_G)$}
\BinaryInfC{$p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash r$}
\RightLabel{$(\Rightarrow_D)$}
\UnaryInfC{$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$}
\end{prooftree}
$$

- $\vdash p \vee (q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

  Système $\mathcal{G}$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p \vdash p, q$}
\RightLabel{$(\vee_D)$}
\UnaryInfC{$p \vdash p \vee q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p \vdash p, r$}
\RightLabel{$(\vee_D)$}
\UnaryInfC{$p \vdash p \vee r$}
\RightLabel{$(\wedge_D)$}
\BinaryInfC{$p \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$q, r \vdash p, q$}
\RightLabel{$(\vee_D)$}
\UnaryInfC{$q, r \vdash p \vee q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$q, r \vdash p, r$}
\RightLabel{$(\vee_D)$}
\UnaryInfC{$q, r \vdash p \vee r$}
\RightLabel{$(\wedge_D)$}
\BinaryInfC{$q, r \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$}
\RightLabel{$(\wedge_G)$}
\UnaryInfC{$q \wedge r \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$}
\RightLabel{$(\vee_G)$}
\BinaryInfC{$p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$}
\RightLabel{$(\Rightarrow_D)$}
\UnaryInfC{$\vdash p \vee (q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$}
\end{prooftree}
$$

  Système $\mathcal{LK}$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$p \vdash p$}
\RightLabel{$(\vee_D^1)$}
\UnaryInfC{$p \vdash p \vee q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$p \vdash p$}
\RightLabel{$(\vee_D^1)$}
\UnaryInfC{$p \vdash p \vee r$}
\RightLabel{$(\vee_D)$}
\BinaryInfC{$p, p \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$}
\RightLabel{(C_G)}
\UnaryInfC{$p \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$q \vdash q$}
\RightLabel{$(\vee_D^2)$}
\UnaryInfC{$q \vdash p \vee q$}
\RightLabel{$(\wedge_G^1)$}
\UnaryInfC{$q \wedge r \vdash p \vee q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$r \vdash r$}
\RightLabel{$(\vee_D^2)$}
\UnaryInfC{$r \vdash p \vee r$}
\RightLabel{$(\wedge_G^2)$}
\UnaryInfC{$q \wedge r \vdash p \vee r$}
\RightLabel{$(\wedge_D)$}
\BinaryInfC{$q \wedge r, q \wedge r \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$}
\RightLabel{(C_G)}
\UnaryInfC{$q \wedge r \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$}
\RightLabel{$(\vee_G)$}
\BinaryInfC{$p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r), (p \vee q) \wedge (p \vee r)$}
\RightLabel{(C_D)}
\UnaryInfC{$p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$}
\RightLabel{$(\Rightarrow_D)$}
\UnaryInfC{$\vdash p \vee (q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 6:

Montrer que les règles (A_G) et (C_D) du système $\mathcal{LK}$ sont correctes. Montrer que la règle $(\vee_D)$ du système $\mathcal{G}$ et la règle $(\Rightarrow_G)$ du système $\mathcal{LK}$ sont correctes.
Correction: On pose $\Gamma = \{\{A_1, \ldots, A_n\}\}$ et $\Delta = \{\{B_1, \ldots, B_k\}\}$. On pose également $\Gamma' = \{\{A'_1, \ldots, A'_{n'}\}\}$ et $\Delta' = \{\{B'_1, \ldots, B'_{k'}\}\}$. Remarque les cas présentés ne sont pas toujours mutuellement exclusifs, mais ce n'est pas grave.

(A_G)**:** Si $\Gamma \vdash \Delta$ est correct, alors $\models \bigwedge_{i=1}^n A_i \Rightarrow \bigvee_{i=1}^k B_i$. Donc pour toute interprétation I:

- Soit $[\bigwedge_{i=1}^n A_i]_I = F$. Alors $[\bigwedge_{i=1}^n A_i \wedge A]_I = F$ et donc $[\bigwedge_{i=1}^n A_i \wedge A \Rightarrow \bigvee_{i=1}^k B_i]_I = V$
- Soit $[\bigvee_{i=1}^k B_i] = V$. Alors $[\bigwedge_{i=1}^n A_i \wedge A \Rightarrow \bigvee_{i=1}^k B_i]_I = V$

Donc $\models \bigwedge_{i=1}^n A_i \wedge A \Rightarrow \bigvee_{i=1}^k B_i$, donc $\Gamma, A \vdash \Delta$ est correct.

(C_D)**:** Si $\Gamma \vdash \Delta, A, A$ est correct, alors $\models \bigwedge_{i=1}^n A_i \Rightarrow \bigvee_{i=1}^k B_i \vee A \vee A$. Comme $A \vee A \equiv A$, $\models \bigwedge_{i=1}^n A_i \Rightarrow \bigvee_{i=1}^k B_i \vee A$. Donc $\Gamma \vdash \Delta, A$ est correct.

$(\vee_D)$**:** Si $\Gamma \vdash \Delta, A, B$ est correct, alors $\models \bigwedge_{i=1}^n A_i \Rightarrow \bigvee_{i=1}^k B_i \vee A \vee B$. Alors $\models \bigwedge_{i=1}^n A_i \Rightarrow \bigvee_{i=1}^k B_i \vee (A \vee B)$ et donc $\Gamma \vdash \Delta, A, \vee B$ est correct.

$(\Rightarrow_G)$**:** Si $\Gamma \vdash A, \Delta$ est correct, alors $\models \bigwedge_{i=1}^n A_i \Rightarrow A \vee \bigvee_{i=1}^k B_i$. Si $\Gamma', B \vdash \Delta'$, alors $\models \bigwedge_{i=1}^{n'} A'_i \wedge B \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{k'} B'_i$. On pose $C = \bigwedge_{i=1}^n A_i, \bigwedge_{i=1}^{n'} A'_i \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \bigvee_{i=1}^k B_i \vee \bigvee_{i=1}^{k'} B'_i$. Pour toute interprétation I:

- Soit $[\bigwedge_{i=1}^{n} A_i]_I = F$, alors $[\bigwedge_{i=1}^{n} A_i, \wedge \bigwedge_{i=1}^{n'} A'_i \wedge (A \Rightarrow B)]_I = F$ et $[C]_I = V$.
- Soit $[\bigwedge_{i=1}^{n'} A'_i]_I = F$, alors $[\bigwedge_{i=1}^{n} A_i, \wedge \bigwedge_{i=1}^{n'} A'_i \wedge (A \Rightarrow B)]_I = F$ et $[C]_I = V$.
- Soit $[\bigvee_{i=1}^{k} B_i]_I = V$, alors $[\bigvee_{i=1}^{k} B_i \vee \bigvee_{i=1}^{k'} B'_i]_I = V$ et $[C]_I = V$.
- Soit $[\bigvee_{i=1}^{k'} B'_i]_I = V$, alors $[\bigvee_{i=1}^{k} B_i \vee \bigvee_{i=1}^{k'} B'_i]_I = V$ et $[C]_I = V$.
- Soit $[A]_I = V$ et $[B]_I = F$. Alors $[A \Rightarrow B]_I = F$, donc $[\bigwedge_{i=1}^{n} A_i, \wedge \bigwedge_{i=1}^{n'} A'_i \wedge (A \Rightarrow B)]_I = F$, d'où $[C]_I = V$.

Donc $\models \bigwedge_{i=1}^{n} A_i, \bigwedge_{i=1}^{n'} A'_i \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{k} B_i \vee \bigvee_{i=1}^{k'} B'_i$, donc $\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'$ est correct.

Exercice 7:

Montrer que les règles $(\wedge_G^1)$ et $(\wedge_G^2)$ du système $\mathcal{LK}$ peuvent être remplacées par la règle $(\wedge_G)$ du système $\mathcal{G}$.

Montrer que la règle $(\Rightarrow_G)$ du système $\mathcal{LK}$ peut être remplacée par celle du système $\mathcal{G}$.

Correction: Il faut montrer que toute application de $(\wedge_G^1)_{\mathcal{LK}}$ ou de $(\wedge_G^2)_{\mathcal{LK}}$ peut être remplacée par un morceau de dérivation utilisant $(\wedge_G)_{\mathcal{G}}$ et inversement.

$(\wedge_G^1)_{\mathcal{LK}}$:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A, B \vdash \Delta}(A_G)}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}(\wedge_G)_{\mathcal{G}}$$

$(\wedge_G^2)_{\mathcal{LK}}$:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A, B \vdash \Delta}(A_G)}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}(\wedge_G)_{\mathcal{G}}$$

$(\wedge_G)_{\mathcal{G}}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A, A \wedge B \vdash \Delta}(\wedge_G^2)_{\mathcal{LK}}}{\Gamma, A \wedge B, A \wedge B \vdash \Delta}(\wedge_G^1)_{\mathcal{LK}}}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}(C_G)$$

Il faut montrer que toute application de $(\Rightarrow_G)_{\mathcal{LK}}$ peut être remplacée par un morceau de dérivation utilisant $(\Rightarrow_G)_{\mathcal{G}}$ et inversement.

On pose: $\Gamma = \{\{A_1, \ldots, A_n\}\}$, $\Delta = \{\{B_1, \ldots, B_k\}\}$, $\Gamma' = \{\{A'_1, \ldots, A'_{n'}\}\}$ et $\Delta' = \{\{B'_1, \ldots, B'_{k'}\}\}$.

$(\Rightarrow_G)_{\mathcal{LK}}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta, \Delta'}(A_D) \times k'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A, \Delta, \Delta'}(A_G) \times n' \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma', B \vdash \Delta, \Delta'}(A_D) \times k}{\Gamma, \Gamma', B \vdash \Delta, \Delta'}(A_G) \times n}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'}(\Rightarrow_G)_{\mathcal{G}}$$

$(\Rightarrow_G)_{\mathcal{G}}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta}(\Rightarrow_G)_{\mathcal{LK}}}{\Gamma, \Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}(C_D) \times k}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}(C_G) \times n$$

Règles du système $\mathcal{LK}$

$$(A_G) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad\qquad (A_D) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

$$(C_G) \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad\qquad (C_D) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}$$

$$(\wedge_G^1) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$(\wedge_G^2) \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$(\wedge_D) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma' \vdash \Delta', B}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', A \wedge B}$$

$$(\vee_G) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash \Delta, \Delta'}$$

$$(\vee_D^1) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\vee_D^2) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\Rightarrow_G) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \qquad\qquad (\Rightarrow_D) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$$

$$(\neg_G) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(Id) \quad \frac{}{A \vdash A}$$

$$(Coupure) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

Règles du système $\mathcal{G}$

$$(\vee_G) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee_D) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\wedge_G) \quad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge_D) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\Rightarrow_G) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow_D) \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg_G) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(Axiome) \quad \frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$