LIFLC Logique - TD3
Correction
Transformation de Tseitin

Exercice 1:

On appelle *littéral* une formule réduite à une variable p (littéral positif) ou la négation d'une variable $\neg p$ (littéral négatif). Soit $L = \neg p$ un littéral négatif. Alors on assimilera $\neg L$ au littéral positif p.

Une clause est une formule de la forme $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ où $L_1, \ldots, L_n$ sont des littéraux. Si $n = 0$, alors par convention la clause est la formule $\bot$. Une formule en forme normale conjonctive (également appelées FNC ou CNF) est une formule de la forme $C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ où $C_1, \ldots, C_m$ sont des clauses. Si $m = 0$, alors par convention la formule est $\top$.

Étant donnée une formule A, il est toujours possible de trouver une CNF A' telle que A est satisfiable si et seulement si A' est satisfiable (on dit alors que A et A' sont équi-satisfiables).

Une telle formule peut être obtenue par la transformation de Tseitin. Cette transformation s'appuie sur la fonction $tseitin(A)$ qui renvoie une paire (L, A'') où L est un littéral et A'' est une CNF. $tseitin(A)$ est inductivement définie comme suit :

- $tseitin(p) = (p, \top)$
- $tseitin(\top) = (q, q)$ avec q une variable fraîche [1].
- $tseitin(\bot) = (q, \neg q)$ avec q une variable fraîche.
- Si $tseitin(A) = (L, A'')$, alors $tseitin(\neg A) = (\neg L, A'')$.
- Si $tseitin(A) = (L_A, A'')$, si $tseitin(B) = (L_B, B'')$ et si q est une variable fraîche, alors :
  - $tseitin(A \vee B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (\neg L_A \vee q) \wedge (\neg L_B \vee q) \wedge (\neg q \vee L_A \vee L_B)\ )$
  - $tseitin(A \wedge B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (\neg L_A \vee \neg L_B \vee q) \wedge (\neg q \vee L_A) \wedge (\neg q \vee L_B)\ )$
  - $tseitin(A \Rightarrow B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (L_A \vee q) \wedge (\neg L_B \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg L_A \vee L_B)\ )$
  - $tseitin(A \Leftrightarrow B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (\neg q \vee \neg L_A \vee L_B) \wedge (\neg q \vee L_A \vee \neg L_B) \wedge (q \vee L_A \vee L_B) \wedge (q \vee \neg L_A \vee \neg L_B)\ )$

Si $(L_A, A'') = tseitin(A)$, alors $A' = A'' \wedge L_A$ est satisfiable si et seulement si A est satisfiable.

Utiliser la transformation de Tseitin pour obtenir des CNF équi-satisfiables à chacune des formules suivantes :

- $\neg p$

  Correction: $tseitin(\neg p)$:
  - $tseitin(p) = (p, \top)$

  $\rightsquigarrow tseitin(\neg p) = (\neg p, \top)$

  Le résultat de la transformation est $\neg p \wedge \top$, i.e. $\neg p$. Remarque : dans la suite on utilise systématiquement l'équivalence remarquable $A \wedge \top \equiv A$.
- $p \wedge r$

  Correction: $tseitin(p \wedge r)$:
  - $tseitin(p) = (p, \top)$
  - $tseitin(r) = (r, \top)$

  $\rightsquigarrow tseitin(p \wedge r) = (\ q_1\ ,\ (\neg p \vee \neg r \vee q_1) \wedge (\neg q_1 \vee p) \wedge (\neg q_1 \vee r)\ )$

  Le résultat de la transformation est $q_1 \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q_1) \wedge (\neg q_1 \vee p) \wedge (\neg q_1 \vee r)$.
- $p \Leftrightarrow (p \wedge r)$

  Correction: $tseitin(p \Leftrightarrow (p \wedge r))$:
  - $tseitin(p) = (p, \top)$
  - $tseitin(p \wedge r)$:
    - $tseitin(p) = (p, \top)$

1. c'est à dire une nouvelle variable, jamais rencontrée jusqu'ici. Comme l'ensemble des variables est infini, on peut toujours trouver une variable fraîche.

    - $tseitin(r) = (r, \top)$

    $\rightsquigarrow tseitin(p \wedge r) = (\ q_1\ ,\ (\neg p \vee \neg r \vee q_1) \wedge (\neg q_1 \vee p) \wedge (\neg q_1 \vee r)\ )$

  $\rightsquigarrow tseitin(p \Leftrightarrow (p \wedge r)) = (\ q_2\ ,\ (\neg p \vee \neg r \vee q_1) \wedge (\neg q_1 \vee p) \wedge (\neg q_1 \vee r) \wedge (\neg q_2 \vee \neg p \vee q_1) \wedge (\neg q_2 \vee p \vee \neg q_1) \wedge (q_2 \vee p \vee q_1) \wedge (q_2 \vee \neg p \vee \neg q_1)\ )$

  Le résultat de la transformation est $q_2 \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q_1) \wedge (\neg q_1 \vee p) \wedge (\neg q_1 \vee r) \wedge (\neg q_2 \vee \neg p \vee q_1) \wedge (\neg q_2 \vee p \vee \neg q_1) \wedge (q_2 \vee p \vee q_1) \wedge (q_2 \vee \neg p \vee \neg q_1)$

- $(p \wedge r) \vee (\neg p \vee \neg r)$

  Correction: $tseitin((p \wedge r) \vee (\neg p \vee \neg r))$:

  - $tseitin(p \wedge r)$:
    - $tseitin(p) = (p, \top)$
    - $tseitin(r) = (r, \top)$

    $\rightsquigarrow tseitin(p \wedge r) = (\ q_1\ ,\ (\neg p \vee \neg r \vee q_1) \wedge (\neg q_1 \vee p) \wedge (\neg q_1 \vee r)\ )$
  - $tseitin(\neg p \vee \neg r)$:
    - $tseitin(\neg p))$:
      - $tseitin(p) = (p, \top)$

      $\rightsquigarrow tseitin(\neg p) = (\neg p, \top)$
    - $tseitin(\neg r))$:
      - $tseitin(r) = (r, \top)$

      $\rightsquigarrow tseitin(\neg r) = (\neg r, \top)$

    $\rightsquigarrow tseitin(\neg p \vee \neg r) = (q_2\ ,\ (p \vee q_2) \wedge (r \vee q_2) \wedge (\neg q_2 \vee \neg p \vee \neg r)\ )$

  $\rightsquigarrow tseitin((p \wedge r) \vee (\neg p \vee \neg r)) = (q_3\ ,\ (\neg p \vee \neg r \vee q_1) \wedge (\neg q_1 \vee p) \wedge (\neg q_1 \vee r) \wedge (p \vee q_2) \wedge (r \vee q_2) \wedge (\neg q_2 \vee \neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q_1 \vee q_3) \wedge (\neg q_2 \vee q_3) \wedge (\neg q_3 \vee q_1 \vee q_2)\ )$

  Le résultat de la transformation est $q_3 \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q_1) \wedge (\neg q_1 \vee p) \wedge (\neg q_1 \vee r) \wedge (p \vee q_2) \wedge (r \vee q_2) \wedge (\neg q_2 \vee \neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q_1 \vee q_3) \wedge (\neg q_2 \vee q_3) \wedge (\neg q_3 \vee q_1 \vee q_2)$.