

# LIFLC Logique - TD3

## Transformation de Tseitin

### Exercice 1:

On appelle *littéral* une formule réduite à une variable  $p$  (littéral positif) ou la négation d'une variable  $\neg p$  (littéral négatif). Soit  $L = \neg p$  un littéral négatif. Alors on assimilera  $\neg L$  au littéral positif  $p$ .

Une clause est une formule de la forme  $L_1 \vee \dots \vee L_n$  où  $L_1, \dots, L_n$  sont des littéraux. Si  $n = 0$ , alors par convention la clause est la formule  $\perp$ . Une formule en forme normale conjonctive (également appelées FNC ou CNF) est une formule de la forme  $C_1 \wedge \dots \wedge C_m$  où  $C_1, \dots, C_m$  sont des clauses. Si  $m = 0$ , alors par convention la formule est  $\top$ .

Étant donnée une formule  $A$ , il est toujours possible de trouver une CNF  $A'$  telle que  $A$  est satisfiable si et seulement si  $A'$  est satisfiable (on dit alors que  $A$  et  $A'$  sont équi-satisfiables).

Une telle formule peut être obtenue par la transformation de Tseitin. Cette transformation s'appuie sur la fonction  $tseitin(A)$  qui renvoie une paire  $(L, A'')$  où  $L$  est un littéral et  $A''$  est une CNF.  $tseitin(A)$  est inductivement définie comme suit :

- $tseitin(p) = (p, \top)$
- $tseitin(\top) = (q, q)$  avec  $q$  une variable fraîche<sup>1</sup>.
- $tseitin(\perp) = (q, \neg q)$  avec  $q$  une variable fraîche.
- Si  $tseitin(A) = (L, A'')$ , alors  $tseitin(\neg A) = (\neg L, A'')$ .
- Si  $tseitin(A) = (L_A, A'')$ , si  $tseitin(B) = (L_B, B'')$  et si  $q$  est une variable fraîche, alors :
  - $tseitin(A \vee B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (\neg L_A \vee q) \wedge (\neg L_B \vee q) \wedge (\neg q \vee L_A \vee L_B))$
  - $tseitin(A \wedge B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (\neg L_A \vee \neg L_B \vee q) \wedge (\neg q \vee L_A) \wedge (\neg q \vee L_B))$
  - $tseitin(A \Rightarrow B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (L_A \vee q) \wedge (\neg L_B \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg L_A \vee L_B))$
  - $tseitin(A \Leftrightarrow B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (\neg q \vee \neg L_A \vee L_B) \wedge (\neg q \vee L_A \vee \neg L_B) \wedge (q \vee L_A \vee L_B) \wedge (q \vee \neg L_A \vee \neg L_B))$

Si  $(L_A, A'') = tseitin(A)$ , alors  $A' = A'' \wedge L_A$  est satisfiable si et seulement si  $A$  est satisfiable.

Utiliser la transformation de Tseitin pour obtenir des CNF équi-satisfiables à chacune des formules suivantes :

- $\neg p$
- $p \wedge r$
- $p \Leftrightarrow (p \wedge r)$
- $(p \wedge r) \vee (\neg p \vee \neg r)$

---

1. c'est à dire une nouvelle variable, jamais rencontrée jusqu'ici. Comme l'ensemble des variables est infini, on peut toujours trouver une variable fraîche.