LIFLC Logique classique TD 5 Correction

Syntaxe du calcul des prédicats

Exercice 1:

On considère l'alphabet suivant :
- Symboles de fonction : $f/2$, $g/1$
- Constantes : a, b
- Symboles de prédicats : $p/1$, $q/2$

On considère les suites des symboles suivantes :
- $g(f(x,y)) \lor p(a)$
- $\exists x\ q(a,y) \land p(f(a,b)) \Rightarrow p(x)$
- $\forall x \exists y\ p(x) \land q(f(y,b))$
- $p(g(z)) \lor \forall x \exists z\ q(a,y)$
- $\exists x\ q(f(x,y), g(z))$
- $\forall y \forall x\ q(x,y)$

1. Quelles sont les suites de symboles qui ne sont pas des formules ?
   Correction:
   - $g(f(x,y)) \lor p(a)$ n'est pas une formule car g est un symbole de fonction et pas un symbole de prédicat.
   - $\forall x \exists y\ p(x) \land q(f(y,b))$ n'est pas une formule car l'arité de q est 2.

   Pour la suite, on pose :
   - $A = \exists x\ q(a,y) \land p(f(a,b)) \Rightarrow p(x)$
   - $B = p(g(z)) \lor \forall x \exists z\ q(a,y)$
   - $C = \exists x\ q(f(x,y), g(z))$
   - $D = \forall y \forall x\ q(x,y)$
2. Donner l'ensembles des variables libres et l'ensemble des variables liées de chaque formule.
   Correction:
   - $FV(A) = \{y\}$, $BV(A) = \{x\}$, $\forall A = \forall y\ A$ et $\exists A = \exists y\ A$
   - $FV(B) = \{y,z\}$, $BV(B) = \{x,z\}$, $\forall B = \forall y \forall z\ B$ et $\exists B = \exists y \exists z\ B$
   - $FV(C) = \{y,z\}$, $BV(C) = \{x\}$, $\forall C = \forall y \forall z\ C$ et $\exists C = \exists y \exists z\ C$
   - $FV(D) = \emptyset$, $BV(D) = \{x,y\}$, $\forall D = D$ et $\exists D = D$

Exercice 2:

On considère l'alphabet :
- Constantes : `titi`, `sylvestre`, `tom`, `jerry`, `spike`
- Symboles de prédicats : `souris`/1, `canari`/1, `chat`/1, `chien`/1, `chasse`/2.

Donner des formules exprimant chacune des propriétés ci-dessous (une proie est un individu qui est chassé par un autre, un prédateur est un individu qui en chasse un autre) :
- Titi a un prédateur.
  Correction: $\exists x\ \texttt{chasse}(x, \texttt{titi})$
- Les chats qui chassent les canaris ne chassent pas les souris.
  Correction: $\forall x\ (\texttt{chat}(x) \land (\exists y\ \texttt{chasse}(x,y) \land \texttt{canari}(y)) \Rightarrow \neg(\exists z\ \texttt{chasse}(x,z) \land \texttt{souris}(z)))$
- Spike est un prédateur d'un prédateur de Jerry.
  Correction: $\exists x\ \texttt{chasse}(\texttt{spike}, x) \land \texttt{chasse}(x, \texttt{titi})$
- x est une proie mais pas un prédateur.
  Correction: $\exists y\ \texttt{chasse}(y,x) \land \neg \exists z\ \texttt{chasse}(x,z)$

— x a un prédateur unique.
Correction: $\exists y$ $\texttt{chasse}(y, x) \wedge \forall z(\texttt{chasse}(z, x) \Rightarrow y \doteq z)$
— x n'est chassé par personne.
Correction: $\forall y$ $\neg\texttt{chasse}(y, x)$
— Tous les chasseurs sont des proies.
Correction: $\forall x((\exists y\ \texttt{chasse}(x, y)) \Rightarrow (\exists z\ \texttt{chasse}(z, x)))$
— Tous les chats sont chasseurs et proies.
Correction: $\forall x(\texttt{chat}(x) \Rightarrow \exists y \exists z\ \texttt{chasse}(y, x) \wedge \texttt{chasse}(x, z))$
— Sylvestre et Tom ne chassent pas les mêmes proies.
Correction: $\forall x(\texttt{chasse}(\texttt{tom}, x) \Rightarrow \neg\texttt{chasse}(\texttt{sylvestre}, x))$

Exercice 3:

On considère l'alphabet :
— Constantes : $\texttt{r}$, $\texttt{b}$, $\texttt{j}$
— Symboles de fonction : $\texttt{suiv}/1, \texttt{prec}/1$
— Symboles de prédicat : $\texttt{compose}/3, \texttt{opposes}/2$
la structure d'interprétation $\mathcal{SI}$:
— Univers : $E = \{Jaune, Rouge, Orange, Bleu, Vert, Violet, Noir, Blanc\}$
— Interprétation :
  — $I(\texttt{r}) = Rouge$, $I(\texttt{b}) = Bleu$, $I(\texttt{j}) = Jaune$
  — $I(\texttt{suiv}) = Rouge \mapsto Orange, Orange \mapsto Jaune, Jaune \mapsto Vert, Vert \mapsto Bleu, Bleu \mapsto Violet, Violet \mapsto Rouge, Noir \mapsto Blanc, Blanc \mapsto Noir$
  — $I(\texttt{prec}) = Orange \mapsto Rouge, Jaune \mapsto Orange, Vert \mapsto Jaune, Bleu \mapsto Vert, Violet \mapsto Bleu, Rouge \mapsto Violet, Blanc \mapsto Noir, Noir \mapsto Blanc$
  — $I(\texttt{compose})$: $e_1, e_2, e_3 \mapsto V$ si le triplet (e_1, e_2, e_3) est dans l'ensemble suivant :$\{(Bleu, Jaune, Vert), (Jaune, Bleu, Vert), (Rouge, Bleu, Violet), (Bleu, Rouge, Violet), (Jaune, Rouge, Orange), (Rouge, Jaune, Orange)\}$
  — $I(\texttt{oppose})$: $e_1, e_2 \mapsto V$ si la paire (e_1, e_2) est dans l'ensemble $\{(Jaune, Violet), (Violet, Jaune), (Vert, Rouge), (Rouge, Vert), (Bleu, Orange), (Orange, Bleu), (Noir, Blanc), (Blanc, Noir)\}$
ainsi que l'affectation de valeurs au variables ζ suivante : $\zeta(x) = Noir$, $\zeta(y) = Bleu$, $\zeta(z) = Rouge$, $\zeta(u) = Violet$

Évaluer la valeur de vérité des formules suivantes par rapport à $\mathcal{SI}$ et ζ :
— $x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)$
Correction:

$$\begin{aligned}
[x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)]_{\mathcal{SI},\zeta} &= f_\vee([x \doteq y]_{\mathcal{SI},\zeta}, [\neg(x \doteq z)]_{\mathcal{SI},\zeta}) \\
&= f_\vee([x \doteq y]_{\mathcal{SI},\zeta}, f_\neg([(x \doteq z)]_{\mathcal{SI},\zeta}))
\end{aligned}$$

On a $[x]_{\mathcal{SI},\zeta} = \zeta(x) = Noir$ et $[y]_{\mathcal{SI},\zeta} = \zeta(y) = Bleu$, donc $[x \doteq y]_{\mathcal{SI},\zeta} = F$.
On a $[x]_{\mathcal{SI},\zeta} = \zeta(x) = Noir$ et $[z]_{\mathcal{SI},\zeta} = \zeta(z) = Rouge$, donc $[x \doteq z]_{\mathcal{SI},\zeta} = F$.
Donc :

$$\begin{aligned}
[x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)]_{\mathcal{SI},\zeta} &= f_\vee(F, f_\neg(F)) \\
&= T
\end{aligned}$$

— $\texttt{suiv}(\texttt{suiv}(z)) \doteq \texttt{j} \wedge \texttt{suiv}(\texttt{suiv}(\texttt{j})) \doteq y$

Correction: On a :

$$\begin{array}{rcl}
[\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(z))]_{\mathcal{SI},\zeta} & = & I(\mathtt{suiv})([\mathtt{suiv}(z)]_{\mathcal{SI},\zeta}) \\
& = & I(\mathtt{suiv})(I(\mathtt{suiv})([z]_{\mathcal{SI},\zeta})) \\
& = & I(\mathtt{suiv})(I(\mathtt{suiv})(\zeta(z))) \\
& = & I(\mathtt{suiv})(I(\mathtt{suiv})(Rouge)) \\
& = & I(\mathtt{suiv})(Orange) \\
& = & Jaune \\
[\mathtt{j}]_{\mathcal{SI},\zeta} & = & I(\mathtt{j}) \\
& = & Jaune
\end{array}$$

Pour chacune des formules suivantes, dire si $\mathcal{SI}$ en est un modèle :

— $\forall x \forall y\ \mathtt{suiv}(x) \doteq y \Leftrightarrow \mathtt{prec}(y) \doteq x$
— $\forall x\ \mathtt{opposes}(x, \mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(x))))$
— $\forall x \forall y\ \mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(x)) \doteq y \Rightarrow x \doteq \mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(\mathtt{suiv}(y))))$
— $\forall x \exists y\ (\ \mathtt{opposes}(x, y) \vee x \doteq y\ ) \wedge \mathtt{compose}(\mathtt{prec}(y), \mathtt{suiv}(y), y)$