

LIF11 Logique - TD Révision

Exercice 1:

Dire si les formules suivantes sont satisfiables et/ou valides. Dans le cas où une formule est valide, on le démontrera en utilisant la résolution (plus précisément, on montrera que $\neg A$ est insatisfiable), puis en utilisant le système \mathcal{G} .

- $p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$
- $p \vee q \Rightarrow (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$
- $(q \vee (r \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge q)) \wedge (s \vee p \vee (\neg s \wedge \neg p))$
- $(p \wedge s) \vee (q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (s \vee r)$

Exercice 2:

Montrer qu'en calcul propositionnel :

- $\models A \Leftrightarrow B$ si et seulement si $A \equiv B$
- $\models A \Rightarrow B$ si et seulement si $A \models B$

Exercice 3: Logique du premier ordre

On considère l'alphabet suivant :

- Constantes : pierre, jacques, sylvie
- Symboles de fonctions : pere/1, mere/1
- Symboles de prédicats : homme/1, femme/1, ancetre_de/2

Trouver des formules logiques exprimant les propriétés ci-dessous :

- x est le grand-père de y .
- Sylvie est la soeur de Pierre.
- Sylvie et Jacques sont cousins (germains).
- Sylvie et Jacques sont cousins : ils ne sont pas ancêtres l'un de l'autre, ni frère ou soeur, ni frere ou soeur d'un l'ancêtre de l'autre (i.e. ((arrière)grand) (oncle/tante)), mais ont un ancêtre en commun.
- Pierre et Jacques sont demi-frères.
- Pierre a un seul frère et une seule soeur.

Exercice 4:

Soit t un terme et σ une substitution tels que $t\sigma = t$ et tel qu'il n'existe pas $x \in \text{dom}(\sigma)$ tel que $\sigma(x) = x$. Montrer par induction sur les termes que les variables substituées par σ (i.e. $\text{dom}(\sigma)$) n'apparaissent pas dans t .

Règles du système \mathcal{G}

$$(\vee_G) \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$(\vee_D) \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\wedge_G) \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$(\wedge_D) \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\Rightarrow_G) \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}$$

$$(\Rightarrow_D) \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg_G) \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

$$(\neg_D) \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(Axiome) \frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$