

# LIFLC – Logique classique

## TD6 – Logique du premier ordre

Licence informatique UCBL – Automne 2017–2018

Les (parties d') exercices noté(e)s avec † sont plus difficiles.

### Exercice 1 : Syntaxe des formules

On considère la signature suivante :

- Symboles de fonction :  $f/2, g/1$
- Constantes :  $a, b$
- Symboles de prédicats :  $p/1, q/2$

On considère les suites des symboles suivantes :

- $g(f(x, y)) \vee p(a)$
- $\exists x q(a, y) \wedge p(f(a, b)) \Rightarrow p(x)$
- $\forall x \exists y p(x) \wedge q(f(y, b))$
- $p(g(z)) \vee \forall x \exists z q(a, y)$
- $\exists x q(f(x, y), g(z))$
- $\forall y \forall x q(x, y)$

1. Quelles sont les suites de symboles qui ne sont pas des formules ?
2. Donner l'ensemble des variables libres de chaque formule. Donner également leur fermetures universelles et existentielles.

### Exercice 2 : Du français aux formules

On considère la signature :

- Constantes :  $titi, sylvestre, tom, jerry, spike$
- Symboles de prédicats :  $souris/1, canari/1, chat/1, chien/1, chasse/2$ .

Donner des formules exprimant chacune des propriétés ci-dessous (une proie est un individu qui est chassé par un autre, un prédateur est un individu qui en chasse un autre) :

- Titi a un prédateur.
- Les chats qui chassent les canaris ne chassent pas les souris.
- Spike est un prédateur d'un prédateur de Jerry.
- $x$  est une proie mais pas un prédateur.
- $x$  a un prédateur unique.
- $x$  n'est chassé par personne.
- Tous les chasseurs sont des proies.
- Tous les chats sont chasseurs et proies.
- Sylvestre et Tom ne chassent pas les mêmes proies.

### Exercice 3 : Interprétations

On considère la signature :

- Constantes :  $r, b, j$
- Symboles de fonction :  $\text{suiv}/1, \text{prec}/1$
- Symboles de prédicat :  $\text{compose}/3, \text{opposes}/2$

l'interprétation  $I$  :

- Univers :  $\mathcal{U} = \{Jaune, Rouge, Orange, Bleu, Vert, Violet, Noir, Blanc\}$
- Interprétation des symboles :
  - $I(r) = Rouge, I(b) = Bleu, I(j) = Jaune$
  - $I(\text{suiv}) = Rouge \mapsto Orange, Orange \mapsto Jaune, Jaune \mapsto Vert, Vert \mapsto Bleu, Bleu \mapsto Violet, Violet \mapsto Rouge, Noir \mapsto Blanc, Blanc \mapsto Noir$
  - $I(\text{prec}) = Orange \mapsto Rouge, Jaune \mapsto Orange, Vert \mapsto Jaune, Bleu \mapsto Vert, Violet \mapsto Bleu, Rouge \mapsto Violet, Blanc \mapsto Noir, Noir \mapsto Blanc$
  - $I(\text{compose}) : e_1, e_2, e_3 \mapsto V$  si le triplet  $(e_1, e_2, e_3)$  est dans l'ensemble suivant :  $\{(Bleu, Jaune, Vert), (Jaune, Bleu, Vert), (Rouge, Bleu, Violet), (Bleu, Rouge, Violet), (Jaune, Rouge, Orange), (Rouge, Jaune, Orange)\}$
  - $I(\text{oppose}) : e_1, e_2 \mapsto V$  si la paire  $(e_1, e_2)$  est dans l'ensemble  $\{(Jaune, Violet), (Violet, Jaune), (Vert, Rouge), (Rouge, Vert), (Bleu, Orange), (Orange, Bleu), (Noir, Blanc), (Blanc, Noir)\}$

ainsi que la valuation  $\zeta$  suivante :  $\zeta(x) = Noir, \zeta(y) = Bleu, \zeta(z) = Rouge, \zeta(u) = Violet$

Évaluer la valeur de vérité des formules suivantes par rapport à  $I$  et  $\zeta$  :

- $x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)$
- $\text{suiv}(\text{suiv}(z)) \doteq j \wedge \text{suiv}(\text{suiv}(j)) \doteq y$

Pour chacune des formules suivantes, dire si  $I$  en est un modèle :

- $\forall x \forall y \text{ suiv}(x) \doteq y \Leftrightarrow \text{prec}(y) \doteq x$
- $\forall x \text{ opposes}(x, \text{suiv}(\text{suiv}(\text{suiv}(x))))$
- $\forall x \forall y \text{ suiv}(\text{suiv}(x)) \doteq y \Rightarrow x \doteq \text{suiv}(\text{suiv}(\text{suiv}(\text{suiv}(y))))$
- $\forall x \exists y ( \text{opposes}(x, y) \vee x \doteq y ) \wedge \text{compose}(\text{prec}(y), \text{suiv}(y), y)$

## Corrections

### Solution de l'exercice 1

- $g(f(x, y)) \vee p(a)$  n'est pas une formule car  $g$  est un symbole de fonction et pas un symbole de prédicat.  
—  $\forall x \exists y p(x) \wedge q(f(y, b))$  n'est pas une formule car l'arité de  $q$  est 2.  
Pour la suite, on pose :
  - $A = \exists x q(a, y) \wedge p(f(a, b)) \Rightarrow p(x)$
  - $B = p(g(z)) \vee \forall x \exists z q(a, y)$
  - $C = \exists x q(f(x, y), g(z))$
  - $D = \forall y \forall x q(x, y)$
- $FV(A) = \{y\}$ ,  $\forall A = \forall y A$  et  $\exists A = \exists y A$ 
  - $FV(B) = \{y, z\}$ ,  $\forall B = \forall y \forall z B$  et  $\exists B = \exists y \exists z B$
  - $FV(C) = \{y, z\}$ ,  $\forall C = \forall y \forall z C$  et  $\exists C = \exists y \exists z C$
  - $FV(D) = \emptyset$ ,  $\forall D = D$  et  $\exists D = D$

### Solution de l'exercice 2

- Titi a un prédateur.  
 $\exists x \text{chasse}(x, \text{titi})$
- Les chats qui chassent les canaris ne chassent pas les souris.  
 $\forall x (\text{chat}(x) \wedge (\exists y \text{chasse}(x, y) \wedge \text{canari}(y)) \Rightarrow \neg(\exists z \text{chasse}(x, z) \wedge \text{souris}(z)))$
- Spike est un prédateur d'un prédateur de Jerry.  
 $\exists x \text{chasse}(\text{spike}, x) \wedge \text{chasse}(x, \text{titi})$
- $x$  est une proie mais pas un prédateur.  
 $\exists y \text{chasse}(y, x) \wedge \neg \exists z \text{chasse}(x, z)$
- $x$  a un prédateur unique.  
 $\exists y \text{chasse}(y, x) \wedge \forall z (\text{chasse}(z, x) \Rightarrow y \doteq z)$
- $x$  n'est chassé par personne.  
 $\forall y \neg \text{chasse}(y, x)$
- Tous les chasseurs sont des proies.  
 $\forall x ((\exists y \text{chasse}(x, y)) \Rightarrow (\exists z \text{chasse}(z, x)))$
- Tous les chats sont chasseurs et proies.  
 $\forall x (\text{chat}(x) \Rightarrow \exists y \exists z \text{chasse}(y, x) \wedge \text{chasse}(x, z))$
- Sylvestre et Tom ne chassent pas les mêmes proies.  
 $\forall x (\text{chasse}(\text{tom}, x) \Rightarrow \neg \text{chasse}(\text{sylvestre}, x))$

### Solution de l'exercice 3 Évaluer la valeur de vérité des formules suivantes par rapport à $I$ et

$\zeta$  :

- $x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)$

$$\begin{aligned} \text{eval}(I, \zeta)(x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)) &= \text{ou}(\text{eval}(I, \zeta)(x \doteq y), \text{eval}(I, \zeta)(\neg(x \doteq z))) \\ &= \text{ou}(\text{eval}(I, \zeta)(x \doteq y), \text{non}(\text{eval}(I, \zeta)(x \doteq z))) \end{aligned}$$

On a  $eval(I, \zeta)(x) = \zeta(x) = \text{Noir}$  et  $eval(I, \zeta)(y) = \zeta(y) = \text{Bleu}$ , donc  $eval(I, \zeta)(x \doteq y) = 0$ .  
 On a  $eval(I, \zeta)(x) = \zeta(x) = \text{Noir}$  et  $eval(I, \zeta)(z) = \zeta(z) = \text{Rouge}$ , donc  $eval(I, \zeta)(x \doteq z) = 0$ .

Donc :

$$\begin{aligned} eval(I, \zeta)(x \doteq y \vee \neg(x \doteq z)) &= ou(0, non(0)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

—  $sui\dot{v}(sui\dot{v}(z)) \doteq j \wedge sui\dot{v}(sui\dot{v}(j)) \doteq y$

On a :

$$\begin{aligned} eval(I, \zeta)(sui\dot{v}(sui\dot{v}(z))) &= I(sui\dot{v})(eval(I, \zeta)(sui\dot{v}(z))) \\ &= I(sui\dot{v})(I(sui\dot{v})(eval(I, \zeta)(z))) \\ &= I(sui\dot{v})(I(sui\dot{v})(\zeta(z))) \\ &= I(sui\dot{v})(I(sui\dot{v})(\text{Rouge})) \\ &= I(sui\dot{v})(\text{Orange}) \\ &= \text{Jaune} \\ eval(I, \zeta)(j) &= I(j) \\ &= \text{Jaune} \end{aligned}$$

D'où  $eval(I, \zeta)(sui\dot{v}(sui\dot{v}(z))) \doteq j = 1$ .

De manière similaire on obtient  $eval(I, \zeta)(sui\dot{v}(sui\dot{v}(j)) \doteq y) = 1$ ,

d'où  $eval(I, \zeta)(sui\dot{v}(sui\dot{v}(z)) \doteq j \wedge sui\dot{v}(sui\dot{v}(j)) \doteq y) = 1$

Pour chacune des formules suivantes, dire si  $I$  en est un modèle :

—  $\forall x \forall y \text{ sui}\dot{v}(x) \doteq y \Leftrightarrow \text{prec}(y) \doteq x$

$I$  est un modèle de cette formule (on peut le vérifier exhaustivement, mais c'est un peu long : 64 vérifications à faire, optimisable en 16 vérifications).

—  $\forall x \text{ opposes}(x, \text{sui}\dot{v}(\text{sui}\dot{v}(\text{sui}\dot{v}(x))))$

$I$  est un modèle de cette formule (vérification exhaustive plus aisée : 8 cas).

—  $\forall x \forall y \text{ sui}\dot{v}(\text{sui}\dot{v}(x)) \doteq y \Rightarrow x \doteq \text{sui}\dot{v}(\text{sui}\dot{v}(\text{sui}\dot{v}(y)))$

$I$  est un modèle de cette formule (on peut le vérifier exhaustivement, mais c'est un peu long : 64 vérifications à faire, optimisable en 8 vérifications).

—  $\forall x \exists y (\text{ opposes}(x, y) \vee x \doteq y) \wedge \text{ compose}(\text{prec}(y), \text{sui}\dot{v}(y), y)$

$I$  n'est pas un modèle de cette formule (e.g. prendre  $\zeta(x) = \text{Noir}$ )