LIF11 - TD1
Correction

Exercice 1:

- Donner une définition de "*l'ensemble des variables d'une formule*".

  Correction: On définit cet ensemble par la fonction $Var(A)$ définie inductivement par:

  - $Var(\top) = Var(\bot) = \emptyset$
  - $Var(p) = \{p\}$ si p est une variable propositionnelle
  - $Var(\neg A) = Var(A)$
  - $Var(A \Box B) = Var(A) \cup Var(B)$ où $\Box$ peut-être $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$

- Montrer que si, pour toutes les variables p d'une formule A, $I_1(p) = I_2(p)$ alors $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$.

  Correction: Par induction sur A.

- Soit A et B deux formules. Soit P_A et P_B leurs ensembles de variables respectifs. Si P_A et P_B sont disjoints, que peut-on dire sur la satisfiabilité de $A \wedge B$ par rapport à celle de A et de B et pourquoi?

  Correction: $A \wedge B$ est satisfiable si et seulement si A et B sont satisfiables:

  - Si $A \wedge B$ est satisfiable, alors il existe une interprétation I telle que $[A \wedge B]_I = V$. Par ailleurs $[A \wedge B]_I = f_\wedge([A]_I, [B]_I)$. D'après la table de vérité de $f_\wedge$ cela signifie que $[A]_I = V$ et $[B]_I = V$. Donc A et B sont satifiables.
  - Si A et B sont satisfiables, il existe I_A telle que $[A]_{I_A} = V$ et il existe I_B telle que $[B]_{I_B} = V$. Soit l'interprétation I_{AB} définie comme suit:
    - $I_{AB}(p) = I_A(p)$ si p est une variable de A
    - $I_{AB}(p) = I_B(p)$ si p n'est pas une variable de A (en particulier pour les variables de B car $Var(A) \cap Var(B) = \emptyset$).

    D'après la question précédente $[A]_{I_{AB}} = [A]_{I_A} = V$ et $[B]_{I_{AB}} = [B]_{I_B} = V$. Donc $[A \wedge B]_{I_{AB}} = f_\wedge([A]_{I_{AB}}, [B]_{I_{AB}}) = V$. Donc $A \wedge B$ est satisfiable.

- Peut-on faire la même déduction si V_A et V_B ne sont pas disjoints? Donner un exemple.

  Correction: Si A et B sont satisfiables mais n'ont pas un ensemble de variables disjoints, on a pas forcément $A \wedge B$ satisfiable: prendre $A = p$ et $B = \neg p$.

Exercice 2:

- Etant donné deux interprétations différentes définies sur le même ensemble de variables, dire s'il est possible de trouver une formule qui permet de les distinguer.

  Correction: Si I_1 et I_2 sont différentes, mais définies sur le même domaine, il existe une variable p telle que $I_1(p) \neq I_2(p)$. La formule est tout simplement p.

- Soit deux interprétations I_1 et I_2 pour un ensemble de variables P. Si $I_1 \neq I_2$, est-il possible de trouver une formule A telle que $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$?

  Correction: Prendre par exemple $A = \top$

- Etant donnée une formule A ayant pour ensemble de variables V_A et V un ensemble de variables tel que $V_A \subset V$. Soit deux interprétations différentes I_1 et I_2 définies pour V. Donner une condition suffisante pour que $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$.

  Correction: Il suffit que pour toutes les variables $p \in Var(A)$, $I_1(p) = I_2(p)$.

- En déduire le nombre maximal d'interprétations à examiner pour déterminer si une formule A est satisfiable.

  Correction: D'après ce qui précède, il n'est pas nécessaire d'examiner une interprétation si on a déjà examiné une autre interprétation dont la valeur pour les variables de A est la même. Le nombre d'interprétations à examiner correspond au nombre de combinaisons de valeurs possibles pour les variables soit $2^{|Var(A)|}$

Exercice 3:

Considérons les formules suivantes:

- $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
- $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
- $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$

Pour chacune de ces formules:

1. Donner l'ensemble de ses sous-formules.
2. Donner la table de vérité de la formule.
3. Dire si la formule est satisfiable et/ou valide.

Exercice 4:

Montrer les équivalences suivantes en comparant la valeur des formules par rapport aux différentes interprétations possibles:

- $(p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q)) \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ $(\equiv p \texttt{ xor } q)$
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \equiv p$
- $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

Exercice 5: Principe de substitution

Montrer que si $A \equiv B$ et si A est une sous-formule de C, alors la formule C', obtenue en remplaçant une occurrence de A par B dans C, est équivalente à C. On pourra utiliser la remarque suivante: $A_1 \equiv A_2$ si et seulement si, pour toute interprétation I, $[A_1]_I = [A_2]_I$.
Correction:

On veut montrer que si $A \equiv B$ et si A est une sous-formule de C, alors la formule C' obtenue en remplaçant une occurrence de A par B dans C est équivalente à C.

La démonstration se fait par induction sur C.

- Si $A = C$, alors $C' = B$, et comme $A \equiv B$, on en déduit $C \equiv C'$. On peut remarquer que si C est atomique, alors $sf(C) = \{C\}$ et donc que l'on a nécessairement $A = C$.

- Si $A \neq C$ alors, d'après ce qui précède, C est de la forme $\neg E$ ou $E_1 \boxdot E_2$, avec $\boxdot \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.
  - Si $C = \neg E$, alors $C' = \neg E'$, avec E' obtenu en remplaçant une occurrence de A par B dans E. Soit I une interprétation. Par hypothèse d'induction, $E \equiv E'$, donc $[E]_I \equiv [E']_I$. On en déduit $[C']_I = f_\neg([E']_I) = f_\neg([E]_I) = [C]_I$. Comme I est quelconque, on en déduit que c'est vrai pour toute interprétation, et donc que $C \equiv C'$.
  - Si $C = E_1 \boxdot E_2$ alors soit l'occurrence de A est remplacée dans E_1, soit elle l'est dans E_2. Supposons qu'elle le soit dans E_1 (la démonstration est similaire dans le cas où elle est remplacée dans E_2). On a alors $C' = E_1' \boxdot E_2$, avec E_1' obtenu à partir de E_1 en remplaçant une occurrence de A par B. Soit I une interprétation. Par hypothèse d'induction, $E_1 \equiv E_1'$, donc $[E_1]_I = [E_1']_I$. On en déduit $[C']_I = f_\boxdot([E_1']_I, [E_2]_I) = f_\boxdot([E_1]_I, [E_2]_I) = [C]_I$. Comme I est quelconque, on en déduit que c'est vrai pour toute interprétation, et donc que $C \equiv C'$.

Exercice 6:

En utilisant les équivalences remarquables, réécrire les formules suivantes en n'utilisant que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$:

- $p \Leftrightarrow (q \vee r)$
- $p \vee (q \Rightarrow p)$

Exercice 7:

Quel est le nombre des différentes fonctions booléennes à deux arguments, à trois arguments, à n arguments?

Exercice 8:

Montrer que:

1. Une formule A est valide si et seulement si $\neg A$ n'est pas satisfiable.

   Correction: Si A est valide, alors pour toute interprétation I, $[A]_I = V$. Regardons $[\neg A]_I$: $[\neg A]_I = f_\neg([A]_I) = f_\neg(V) = F$. Donc pour toute interprétation I, $[\neg A]_I = F$. Donc il n'y a aucune interprétation I telle que $[\neg A]_I = V$. Donc $\neg A$ n'est pas satisfiable.

   Si $\neg A$ n'est pas satisfiable, alors pour toute interprétation I, $[\neg A]_I = F$. Or $[\neg A]_I = f_\neg([A]_I)$. Donc on a forcément $[A]_I = V$. Donc A est valide.

2. $A_1, \ldots, A_n \models B$ si et seulement si $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide (noté $\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$).

   Correction:

   Si $A_1, \ldots, A_n \models B$ alors pour toute interprétation I: si $[A_1]_I = V$ et ... et $[A_n]_I = V$ alors $[B]_I = V$. En regardant la table de vérité de $f_\wedge$, on peut remarquer que $[A_1]_I = V$ et ... et $[A_n]_I = V$ si et seulement si $[A_1 \wedge \ldots \wedge A_n]_I = V$. Posons $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$. D'après la table de vérité de $f_\Rightarrow$, la seule possibilité pour que $[A \Rightarrow B]_I = F$ est que $[A]_I = V$ et $[B]_I = F$. Or cette possibilité est contradictoire avec le fait que si $[A]_I = V$ alors $[B]_I = V$. On en déduit que $[A \Rightarrow B]_I = V$. Comme ce raisonnement est valable quelque soit I, on obtient que $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide.

Si $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide, alors pour toute interprétation I, $[A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B]_I = V$. D'après la table de vérité de $f_{\Rightarrow}$, on en déduit que si $[A_1 \wedge \ldots \wedge A_n]_I = V$, alors $[B]_I = V$. En regardant la table de vérité de $f_{\wedge}$, on peut remarquer que $[A_1]_I = V$ et $\ldots$ et $[A_n]_I = V$ si et seulement si $[A_1 \wedge \ldots \wedge A_n]_I = V$. On en déduit donc que si $[A_1]_I = V$ et $\ldots$ et $[A_n]_I = V$ alors $[B]_I = V$. Comme ce raisonnement est valable pour toute interprétation I, on en déduit que $A_1, \ldots, A_n \models B$.

3. $\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$ si et seulement si $\{A_1, \ldots, A_n, \neg B\}$ n'est pas satisfiable.

   Correction:

   D'après ce qui précède, $A_1, \ldots, A_n \models B$ si et seulement si $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide.

   Réécrivons la formule $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$:

$$\begin{aligned} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B &\equiv \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \vee B \\ &\equiv \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B \\ &\equiv \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B) \end{aligned}$$

   Donc $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B) \equiv A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$.

   D'après le premier point, on déduit que $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide si et seulement si $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ n'est pas satisfiable, c'est-à-dire si et seulement si $\{A_1, \ldots, A_n, \neg B\}$ est insatisfiable.