LIF11 - TD2

Exercice 1:

Pour chacune des fonctions f_1 et f_2, donner une formule qui la réalise. On pourra éventuellement pour cela suivre la méthode suggérée à travers la démonstration du fait que $\{\top, \bot, \neg, \wedge, \Rightarrow, \vee\}$ est fonctionnellement complet.

x	y	z	$f_1(x,y,z)$	$f_2(x,y,z)$
1	1	1	1	0
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

Exercice 2: Additionneur binaire

Un additionneur binaire est un circuit électronique permettant de réaliser des additions sur des entier positifs écrit en base 2. Un additionneur additionnant des nombres codés sur n bits possède $2 \times n$ entrées et $n+1$ sorties (en effet, en binaire $10 + 10 = 100$).

On souhaite vérifier un additionneur binaire en contrôlant ses sorties en fonction de ses entrées. L'additionneur est représenté par $n+1$ formules $A_1, \ldots, A_{n+1}$ ayant $2n$ variables représentant les entrées du circuit et telle que valeur de vérité de A_k correpond à la valeur de la k^{ieme} sortie.

1. Donner la table de vérité de deux fonctions pour l'addition de 3 bits:
   - la première calcule la somme des 3 bits sans retenue (i.e. $1 + 1 + 1 \mapsto 1$);
   - la seconde calcule la retenue de cette somme.
2. Donner deux formules réalisant ces fonctions.
3. En déduire les formules spécifiant les sorties d'un additionneur 2 bits. On considère que les entier sont représentés avec le bit de poids faible ayant le plus petit indice, que le premier entier est représenté par p_1, p_2 et que le second est représenté par q_1, q_2.
4. Généraliser la construction précédente pour donner une manière de construire les formules de spécification des sorties d'un additionneur n bits.
5. Expliquer comment on peut utiliser ces formules avec les formules $A_1, \ldots, A_{n+1}$ afin de vérifier que l'additionneur est correct.

Exercice 3:

Pour chacune des formules *motif*, dire quelles sont les formules *candidat* qui en sont des instances et avec quelle substitution. Lorsqu'une formule candidat n'est pas une instance d'une formule motif, indiquer l'endroit où il y a non-correspondance.

motifs	candidats
$p \Rightarrow q \wedge r$	$u \Rightarrow (s \vee t) \wedge s$
$p \vee q \Rightarrow r$	$u \vee t \Rightarrow u \wedge (u \vee t)$
$p \Rightarrow p \wedge q$	$\bot \vee u \Rightarrow (\bot \vee u) \wedge s$
$p \vee q \Rightarrow p \wedge (r \vee q)$	

Exercice 4:

Démontrer que les séquents suivants sont corrects en utilisant le système $\mathcal{G}$:

- $(p \Rightarrow q) \wedge p \vdash q$
- $\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
- $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$
- $\vdash p \vee (q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Exercice 5:

Montrer que la règle $(\vee_D)$ du système $\mathcal{G}$ et la règle $(\Rightarrow_G)$ du système $\mathcal{G}$ sont correctes.

Règles du système $\mathcal{G}$

$$(\vee_G) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee_D) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\wedge_G) \quad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge_D) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\Rightarrow_G) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow_D) \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg_G) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(\mathit{Axiome}) \quad \frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$