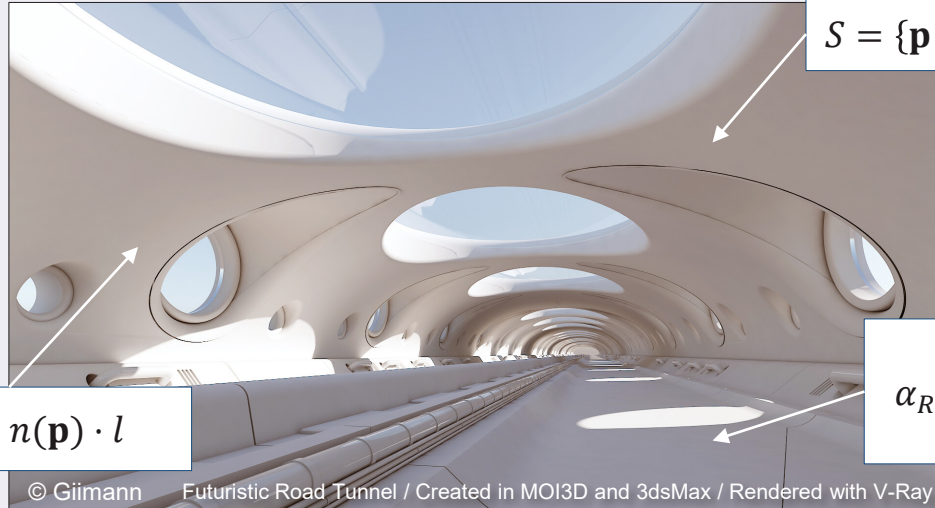


Computer Graphics

From mathematics ...



$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$

$$d(\mathbf{p}) = n(\mathbf{p}) \cdot l$$

$$\alpha_R(\mathbf{p}) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \delta_i$$

© Giimann Futuristic Road Tunnel / Created in MOI3D and 3dsMax / Rendered with V-Ray

... to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Mathematics

Modeling

Color and Texturing

Shading

Realistic Rendering

Acceleration

Computer Graphics

Surfaces Implicites

Surfaces implicites

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

Applications

Représentation adaptée à la modélisation de volumes de géométrie et de topologie changeante

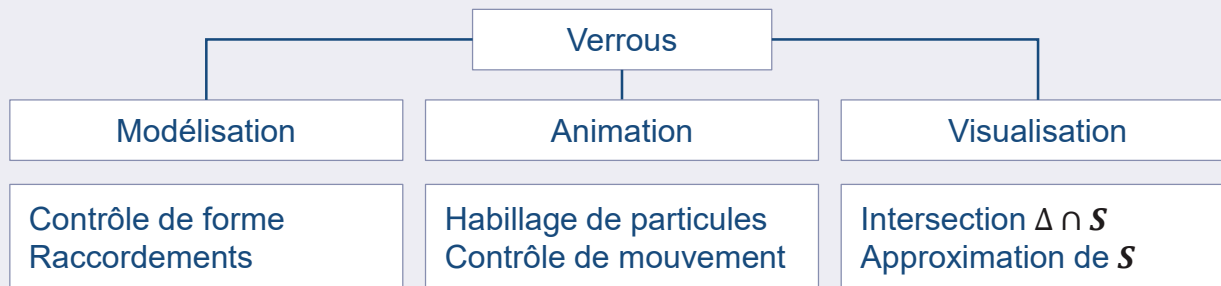


Terminator 2 Judgment day

Verrous scientifiques et techniques

Variété de formes

Représentation compacte



eric.galin@liris.cnrs.fr

<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

Surfaces implicites

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

Définition

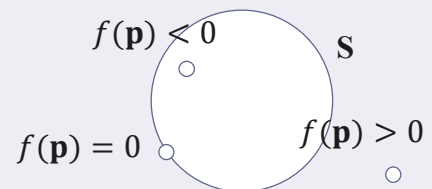
Caractérisation

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$

Si 0 valeur régulière de f , alors $f^{-1}(0)$ est une 2 variété

Convention d'intérieur de la surface $f(\mathbf{p}) < 0$

Une 2 variété **sépare** \mathbf{R}^3 en une surface et 2 sous domaines connexes : une région **finie** dans la surface S et une région **infinie** dehors (théorème de séparation)



$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 - 1$$

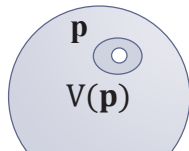
Sphère unité

Propriétés

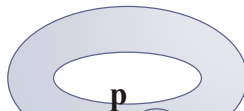
Formes géométriques à 2 dimensions dans \mathbf{R}^3

Un voisinage $V(\mathbf{p})$ est équivalent à un disque

2 variété

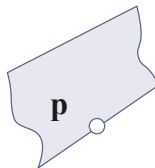


Sphère

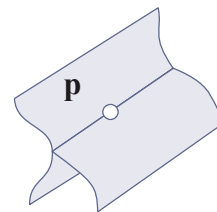


Tore

Autres



Surface à bord



Raccord à trois feuilles



eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalain

Gradient

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

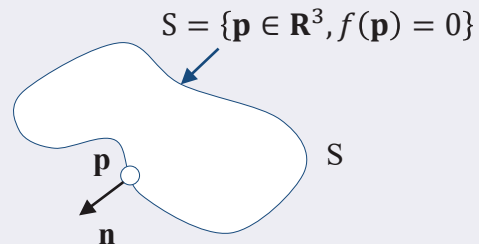
Définition et propriétés

Le gradient ∇f est le vecteur des dérivées partielles

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Approximation d'une dérivée

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x + \varepsilon, y, z) - f(x - \varepsilon, y, z)}{2\varepsilon}$$



La normale \mathbf{n} à la surface S dérive du gradient

$$\forall \mathbf{p} \in S \quad \mathbf{n} = \nabla f(\mathbf{p}) / |\nabla f(\mathbf{p})|$$

Suivi de gradient

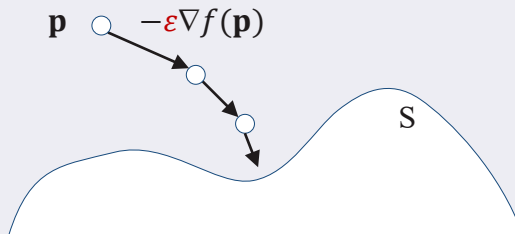
Projection d'un point proche de la surface sur S

Gradient descent

Start from \mathbf{p}

At every step

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} - \varepsilon \nabla f(\mathbf{p})$$



eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalain

Dérivée seconde

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

Matrice Hessienne

Matrice carrée $\mathbf{H}(f)$ des dérivées partielles secondes de f

$$\mathbf{H}_{ij}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Définie et symétrique f de C^2 définie sur un ouvert Ω de \mathbf{R}^3

$$\mathbf{H}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Applications

Nature des points critiques de la fonction f (annulation de ∇f)

Un point critique \mathbf{p} de f est dégénéré si $\det \mathbf{H}(f)(\mathbf{p}) = 0$

Classification par analyse du signe des valeurs propres de $\mathbf{H}(f)$

La courbure se déduit de la matrice \mathbf{H} de f

$$k_G = \frac{\nabla f \mathbf{H}_f^* \nabla f^t - |\nabla f|^2 t(\mathbf{H})}{|\nabla f|^4}$$

$$k_M = \frac{\nabla f \mathbf{H}_f \nabla f^t - |\nabla f|^2 t(\mathbf{H})}{2|\nabla f|^3}$$

\mathbf{H}_f^* matrice des cofacteurs, $t(\mathbf{H})$ trace de \mathbf{H}

Master



eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalain

Propriétés de Lipschitz

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

Définition

Une fonction de classe C^0 est λ -Lipschitzienne si et seulement si :

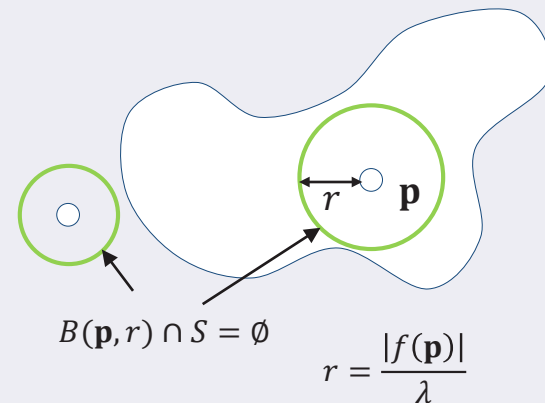
$$\exists \lambda > 0 \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times \Omega |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \lambda |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

Distance entre \mathbf{x} et \mathbf{y}

Propriétés

Critère d'exclusion [Hart1996]

$$\forall \mathbf{p} \in \mathbf{R}^3 B(\mathbf{p}, |f(\mathbf{p})|/\lambda) \cap S = \emptyset$$



eric.galin@liris.cnrs.fr

<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

J. Hart. Sphere Tracing: A Geometric Method for the Anti aliased Ray Tracing of Implicit Surfaces, *The Visual Computer*, **12**(10), 1995

Computer Graphics

Distance Fields

Arbre de construction

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

Construction

Difficulté fondamentale

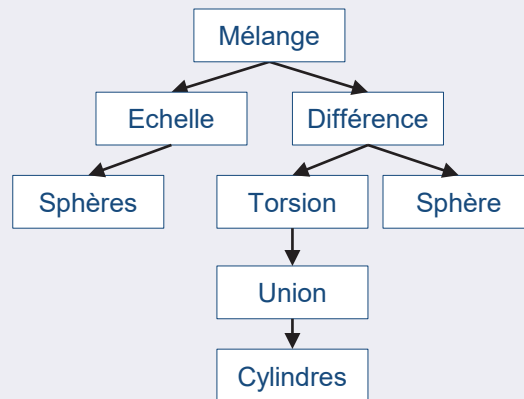
Construire une expression analytique de la distance
Euclidienne signée est en général **impossible**

On construit f comme une **borne inférieure** (en valeur
absolue) C^0 ou 1-Lipschitzienne avec $\forall \mathbf{p} |f(\mathbf{p})| \leq |d(\mathbf{p}, S)|$

Combinaison hiérarchique [Wyvill1999]

Primitives aux feuilles

Opérateurs aux nœuds



eric.galin@liris.cnrs.fr

<http://liris.cnrs.fr/~egalain>

B. Wyvill, A. Guy, E. Galin. Extending the CSG-Tree. *Computer Graphics Forum*. **18** (4), 149 – 158, 1999

Primitives

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

Distance à un squelette

Convention $f(\mathbf{p}) < 0$ si \mathbf{p} dans l'objet, $f(\mathbf{p}) > 0$ dehors

Tore, disque arrondi, barre arrondie, sphère, sphère le long d'une courbe

$$f(\mathbf{p}) = d(\mathbf{p}, S) - r$$

Rayon

Distance au squelette

Sphère

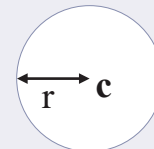
Courbe



Snail
© Inigo Quilez

Vidéo

Vidéo



$$f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| - r$$

Primitives polygonales (boite, pyramide) : intersections de demi espaces...

$$d(\mathbf{p}, \pi) = (\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n}$$



eric.galin@liris.cnrs.fr
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

Opérateurs de combinaison

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

Opérateurs booléens

Union, intersection, différence

$$f_{A \cup B}(\mathbf{p}) = \min(f_A, f_B)$$

$$f_{A \cap B}(\mathbf{p}) = \max(f_A, f_B)$$

$$f_{A-B}(\mathbf{p}) = \max(f_A, -f_B)$$

Mélange

Dans le domaine des Blobs, on calcule $f_A + f_B$ simplement [Wyvill1999]

Modèle plus complexe pour les distances signées

$$f_{A \cup^* B}(\mathbf{p}) = \min(f_A, f_B) - g(f_A, f_B)$$

Union

Offset

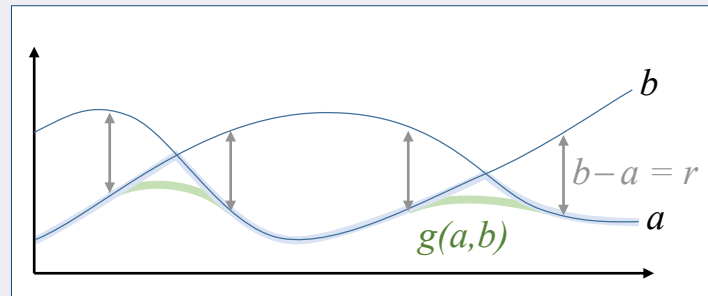
$$\text{Correction } g(a, b) = \frac{1}{6} r h^3$$

avec $h = \max(r - |a - b|, 0) / r$

Rayon de mélange



Elephant © Inigo Quilez



B. Wyvill, A. Guy, E. Galin. Extending the CSG-Tree. *Computer Graphics Forum*. 18 (4), 149 – 158, 1999



eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

Transformations affines

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

Principe

En modélisation implicite, on déforme l'espace par la transformation inverse

Translation, rotation, homothétie

$$f_{\omega(A)}(\mathbf{p}) = 1/\|J_{\omega^{-1}}\| f_A \circ \omega^{-1}$$

Norme du Jacobien

$$f_{T(A)}(\mathbf{p}) = f_A \circ (\mathbf{p} - \mathbf{t})$$

Translation inverse

$$f_{R(A)}(\mathbf{p}) = f_A \circ R^{-1}(\mathbf{p})$$

Rotation inverse

$$R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$$

$$f_{S(A)}(\mathbf{p}) = 1/s f_A \circ (\mathbf{p}/s)$$

Homothétie inverse

Les compositions de transformations ne sont **pas commutatives**

Matrices de rotation

Différentes matrices selon les repères [Shirley]

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

où $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$

$$R_u(\theta) = \begin{pmatrix} x^2 a + c & xya - sz & xza + sy \\ xya + sz & y^2 a + c & yza - sx \\ xza - sy & yza + sx & z^2 a + c \end{pmatrix}$$

où $a = 1 - \cos \theta$

P Shirley. Fundamentals of Computer Graphics. Third Edition. AK Peters



eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

Composition

Implicit Surfaces

Distance Fields

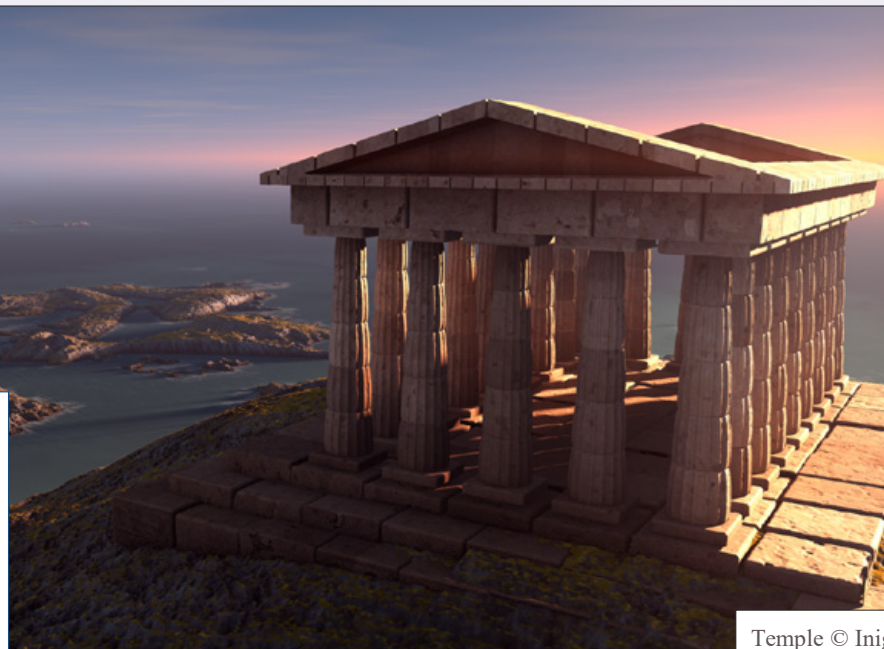
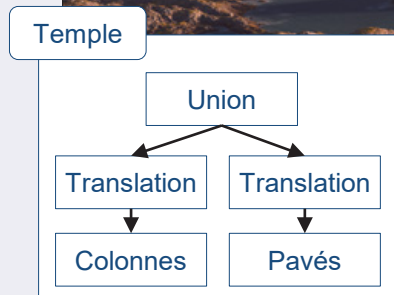
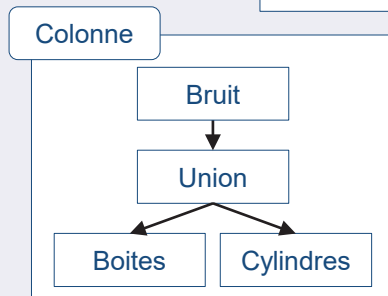
Ray Intersection

Appendix

Formes complexes

Construction de **formes complexes** par assemblage hiérarchique de primitives
Placement d'**instances** et composition dans le graphe de scène

Graphe de scène \Leftrightarrow Composition de fonctions \Leftrightarrow Appels



Temple © Inigo Quilez



eric.galin@liris.cnrs.fr
<http://liris.cnrs.fr/~egalain>

Déformation

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

Définition

Déformation l'espace ω

Restriction éventuelle à une région Ω

$$f_{\omega(A)}(\mathbf{p}) = f_A \circ \omega^{-1}$$

Mise en œuvre analytique

La fonction ω doit être **inversible**

Jacobien $\mathbf{J}_{\omega^{-1}}$ **complexe** pour calculer analytiquement ∇f

$$\omega_{\dot{\theta}}^{-1}(\mathbf{p}) = \omega_{-\dot{\theta}}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} cx & sy & 0 \\ -sy & cy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $c = \cos \dot{\theta}z$ et $s = \sin \dot{\theta}z$

Torsion [Barr1984]

Vitesse angulaire



Perturbation par bruit

Déplacement stochastique de \mathbf{p}

Fractional Brownian Motion

$$f_{\omega(A)}(\mathbf{p}) = f_A \circ (\mathbf{p} - \delta(\mathbf{p}))$$

Bruit ou turbulence

B. Wyvill, A. Guy, E. Galin. Extending the CSG-Tree. *Computer Graphics Forum*. **18** (4), 149 – 158, 1999



eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalina

Computer Graphics

Ray – Distance Field Intersection

Introduction

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

Visualization

$$S = \{\mathbf{p} \in R^3 | f(\mathbf{p}) = 0\}$$

Polygonization [Araujo2015] converts model to **large** meshes
Direct **ray tracing** remains computationally **intensive**
Parallel implementation partially alleviate the problem



Ladybug
© Inigo Quilez



eric.galin@liris.cnrs.fr
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

Ray marching

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

Définition

Déplacement le long du rayon Δ à **pas constant** ε

Intersection si $f(\mathbf{p})$ change de signe

Raffinement par dichotomie

Ray Marching

Start from ray origin $t = 0$

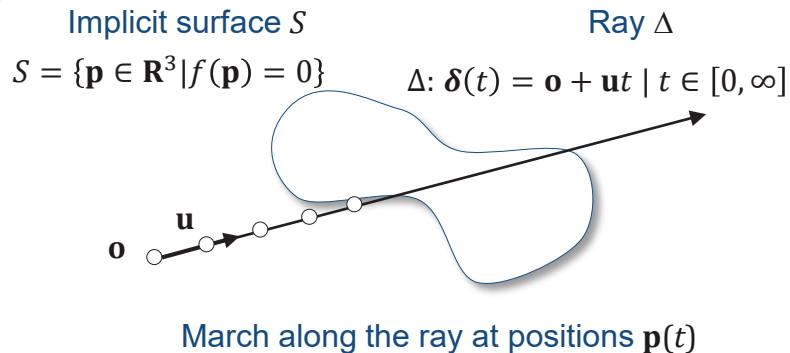
At every step

Compute $\mathbf{p} = \mathbf{o} + \mathbf{d}t$ Intersection **found**

If $f(\mathbf{p}) < 0$ then return t

Otherwise step forward

$t = t + \varepsilon$



Computationally **intensive** with **fixed step** [Perlin1989]
Robust Lipschitz techniques with **global constants** [Kalra1989]

K. Perlin, E. Hoffert. Hypertexture. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 23(3), 1989.

D. Kalra, H. Barr. Guaranteed Ray Intersections with Implicit Surfaces. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 23(3), 1989.



eric.galin@liris.cnrs.fr

<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

Sphere Tracing

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

Lipschitz functions

$$\exists \lambda > 0 \forall (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 |f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})| \leq \lambda |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$$

Exclusion criterion: $|f(\mathbf{p})|/\lambda$ is a signed distance bound to S

$$\forall \mathbf{p} \in \mathbf{R}^3 B(\mathbf{p}, |f(\mathbf{p})/\lambda|) \cap S = \emptyset$$

Global bound λ over \mathbf{R}^3

Sphere Tracing [Hart1996]

Start from ray origin $t = 0$

At every step

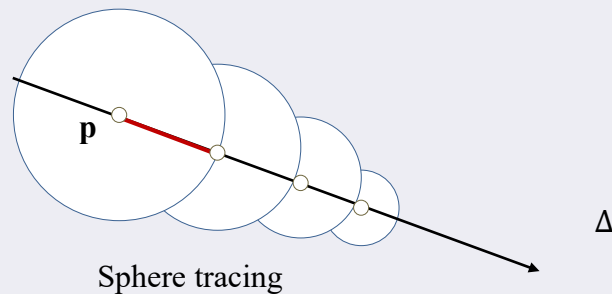
Compute $\mathbf{p} = \mathbf{o} + \mathbf{d}t$

If $f(\mathbf{p}) < 0$ then return t

Otherwise step forward

$t = t + |f(\mathbf{p})|/\lambda$

Intersection found



Sphere Tracing [Hart1989, Hart1996, Keinert2014] **adapts** step with **global** constants

J. Hart. Sphere Tracing: A Geometric Method for the Antialiased Ray Tracing of Implicit Surfaces. *The Visual Computer* 12(10), 527–545, 1996.



eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalain

Computer Graphics

Appendix

Distance à une boîte

Implicit Surfaces

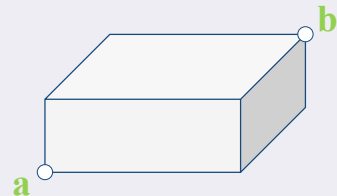
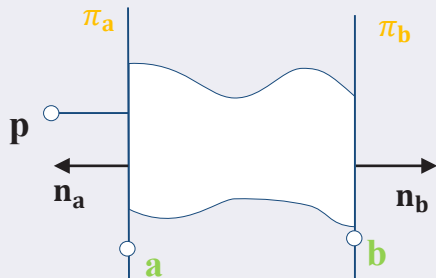
Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

Distance Euclidienne

On utilise la distance entre \mathbf{p} et deux plans parallèles



$$d(\mathbf{p}, \pi_a \cap \pi_b) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{a}_x < \mathbf{p}_x < \mathbf{b}_x \\ \mathbf{a}_x - \mathbf{p}_x & \text{si } \mathbf{p}_x < \mathbf{a}_x \\ \mathbf{p}_x - \mathbf{b}_x & \text{si } \mathbf{p}_x > \mathbf{b}_x \end{cases}$$

$$d^2(\mathbf{p}, B) = d^2(\mathbf{p}, S_x) + d^2(\mathbf{p}, S_y) + d^2(\mathbf{p}, S_z)$$

Distance signée

Soit $\mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$ le centre, $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \mathbf{c}$ et $\mathbf{d} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/2$ la diagonale

On tire parti de la symétrie en définissant $\mathbf{q} = \text{abs}(\tilde{\mathbf{p}}) - \mathbf{d}$

0 si $\mathbf{q} \notin B$ Maximum de $\mathbf{q}_i < 0$ si $\mathbf{q} \in B$

$$d(\mathbf{p}, B) = \min(\max(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z), 0) + |\max(\mathbf{q}, 0)|$$

Norme Euclidienne

0 si $\mathbf{q} \in B$

Vecteur nul



eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalain

Distance à un segment

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

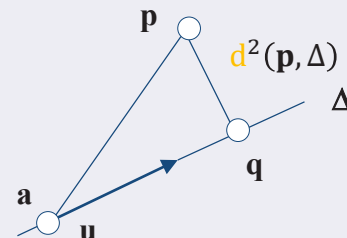
Appendix

Distance à une droite

Pythagore dans le triangle apq

$$d^2(\mathbf{p}, \Delta) = (\mathbf{p} - \mathbf{a})^2 - ((\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u})^2$$

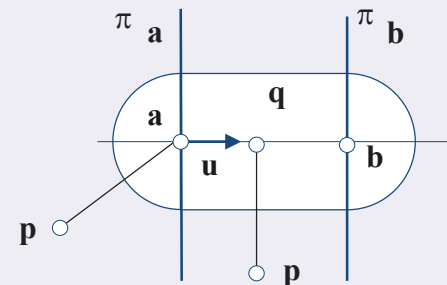
Carré de la distance



Distance à un segment

Calcul de $l = (\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$ où $\mathbf{u} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) / |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$

$$d^2(\mathbf{p}, [\mathbf{ab}]) = \begin{cases} (\mathbf{p} - \mathbf{a})^2 & \text{si } l < 0 \\ (\mathbf{p} - \mathbf{a})^2 - ((\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u})^2 & \text{si } 0 < l < |\mathbf{b} - \mathbf{a}| \\ (\mathbf{p} - \mathbf{b})^2 & \text{sinon} \end{cases}$$



eric.galin@liris.cnrs.fr

<http://liris.cnrs.fr/~egalain>

Distance à un cercle ou un disque

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

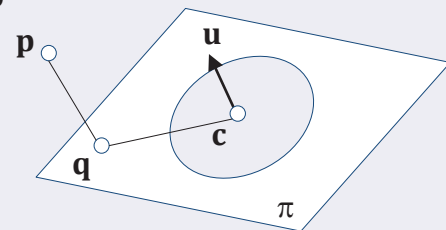
Appendix

Cercle

Par construction $d(\mathbf{p}, C)^2 = d(\mathbf{p}, \pi)^2 + ((\mathbf{c} - \mathbf{q}) - r)^2$ ou \mathbf{q} projeté de \mathbf{p}

```
double Circle::R(const Vector& p) const {  
    Vector n = p - c;  
    double h = n * u;  
    double y = n * n - h * h; // Radial distance  
    y = r - sqrt ( y ); // Distance to circle  
    return sqrt ( y * y + h * h );  
}
```

```
if ( y < r*r ) { return z; } // Distance to disc
```



Disque

On teste si $|\mathbf{c} - \mathbf{q}| < r$: dans ce cas où l'on calcule la distance au plan π



eric.galin@liris.cnrs.fr
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

Distance à une courbe

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

Distance d'un point à une courbe

Soit Γ une courbe d'équation paramétrée $\mathbf{c}(t)$ où $t \in [0,1]$

$$d^2(\mathbf{p}, \Gamma) = \min_{t \in [0,1]} (\mathbf{c}(t) - \mathbf{p})^2$$

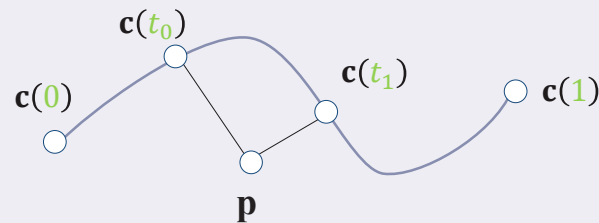
Polynôme de degré n

Recherche des racines de l'équation

$$d^2(\mathbf{p}, \Gamma)' = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{c}(t) - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{c}'(t) = 0$$

Equation de degré $2n - 1$ à résoudre sur $[0,1]$

Chercher le minimum de $(\mathbf{c}(t) - \mathbf{p})^2$ avec au plus $2n - 1$ racines t_k et $\{0,1\}$



eric.galin@liris.cnrs.fr
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>