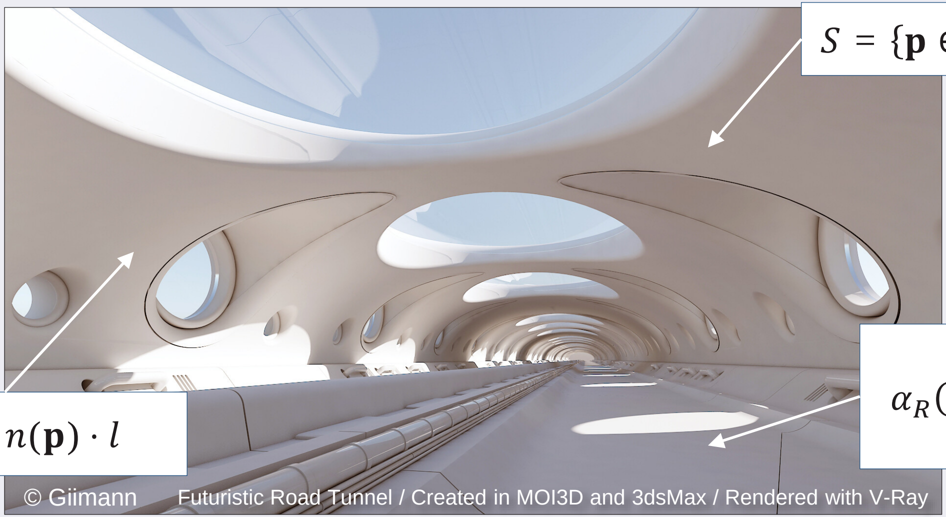
Computer Graphics

From mathematics …

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$



© Giimann Futuristic Road Tunnel / Created in MOI3D and 3dsMax / Rendered with V-Ray

$$d(\mathbf{p}) = n(\mathbf{p}) \cdot l$$

$$\alpha_R(\mathbf{p}) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \delta_i$$

… to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Mathematics
Modeling
Color and Texturing
Shading
Realistic Rendering
Acceleration
Animation

Introduction

Overview

Procedural animation

Interpolation entre positions, orientation

Animation par poses
Points clefs, motion capture
Animation de personnages, skinning
Motion planning, simulation de foule

Résolution d'équations différentielles

Simulation physique
Equations de mouvement
Objets rigides, déformables
Fluides

Animation procédurale
Equations de la trajectoire
Mouvement de surface
Déformation par warping

Fonctions analytiques du temps

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Animation par poses

Video Video

Animation
Géométrie des corps
Capture du mouvement
Points clefs, poses

Acquisition
Traitement
Projection

Edition & Planning
Correction des mouvements
Contraintes (contacts, déformations)
Eviter les collisions indésirables

Simulation de foule
Analogie simulation de fluide
Agents
Contrôle de trajectoires


Game of Thrones


World War Z

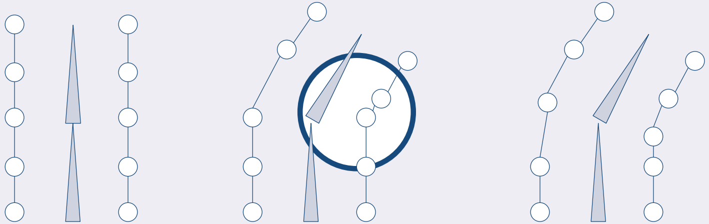
Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Squelettes de déformation

Skinning et rigging

Les sommets $\mathbf{p}$ du maillage sont attachés aux éléments du squelette d'animation



Lien direct

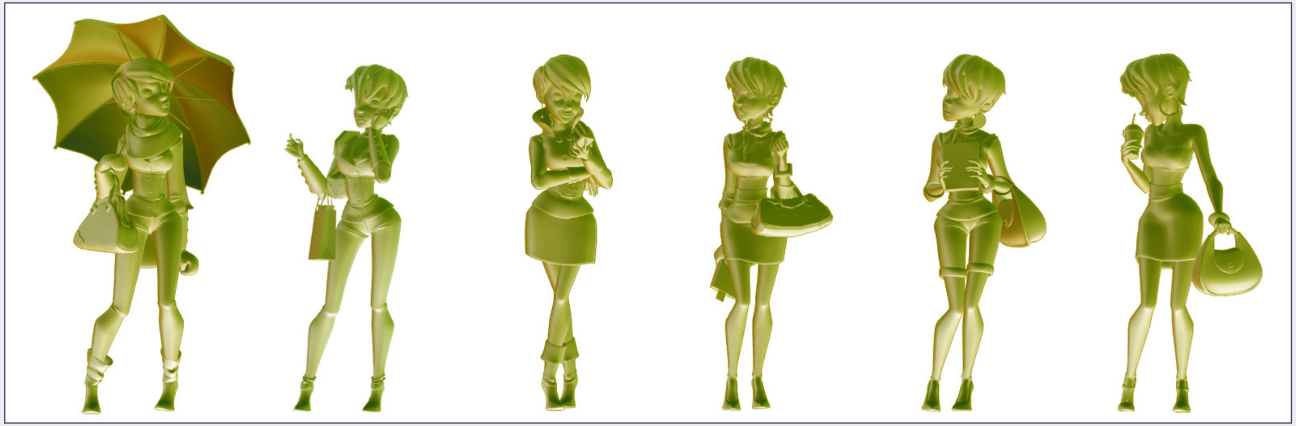
Pondération

$$\mathbf{q} = \sum_{i=0}^{i=n} \omega_i \, \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{p}$$

Poids

Matrice locale

En bougeant les point de contrôle du squelette, le maillage suit la déformation



eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Simulation physique

Overview

Procedural animation

Solides en mouvement
Equations différentielles
Calcul de trajectoire
Détection de collision

Fractures
Destruction
Résistance des matériaux
Propagation des fractures

Spécifiques
Tissus (système masse ressort), cheveux (courbes)
Interaction avec des forces externes
Collision, friction

Fluides
Méthodes Lagrangiennes, Eulériennes
Interaction avec des objets
Contrôle

Video

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Procedural animation

Animation procédurale

Définition

Définition explicite (procédurale, analytique) des équations de mouvement

Courbe $\mathbf{c}(t)$
Repère local de Frénet

Procédural
Arbre de construction
Déplacement sur une trajectoire
Surface en mouvement

Paramètres des primitives
Matrices de transformation $\mathbf{M}(t)$

Surface $\mathbf{p}(u,v,t)$

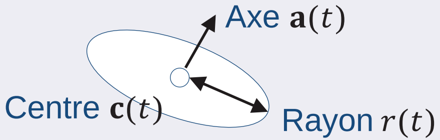
Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

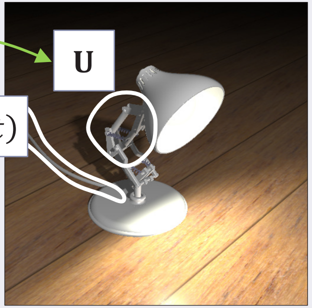
Arbre de construction

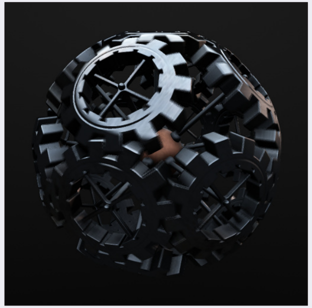
Modèle

Paramètres géométriques fonctions du temps
Transformations affines pour les mouvement solides



- Union
  - Rotation $\mathbf{R}(t)$
    - Union $\mathbf{U}$
      - Cylindre
      - Disque
  - Translation $\mathbf{T}(t)$
    - Courbe $\mathbf{C}(t)$
    - Disque



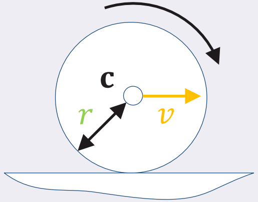


Equations dérivées de la physique et de la géométrie

$$\mathbf{M} = \mathbf{T} \circ \mathbf{R}$$

Translation
$\mathbf{T}(vt, 0, r)$

Rotation
$\mathbf{R}_y(\theta)$ où $\theta = \omega t$
avec $\omega = v / 2\pi r$



Shader

Université Claude Bernard Lyon 1

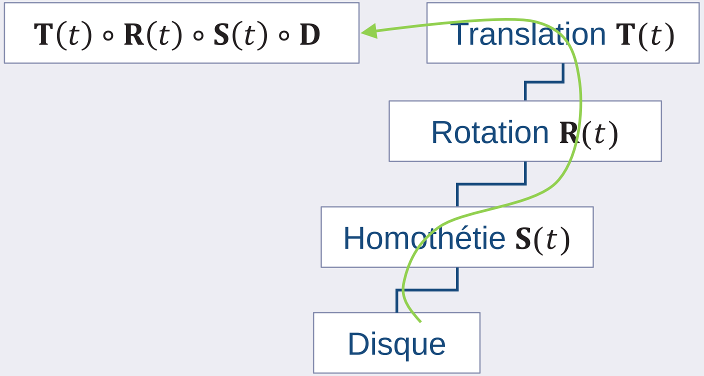
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Transformations

Opérateurs de transformation

Modèle hiérarchique

Composition des transformations affines



$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}(s) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix}$$

Pour intégrer les translation au formalisme matriciel, besoin de passer en coordonnées homogènes

Animation

Transformations paramétrées par le temps t

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

Transformations

Remarques

Nombreuses propriétés et formules sur les matrices

Référence

Rotation d'un vecteur $\mathbf{v}$ d'angle θ autour de l'axe $\mathbf{u}$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}}(\theta) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta)$$

Formule de Rodrigues

Rotation d'angle θ autour de l'axe $\mathbf{u}$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x^2\,\bar{c} + c & \mathbf{u}_x\mathbf{u}_y\,\bar{c} - s\,\mathbf{u}_z & \mathbf{u}_x\mathbf{u}_z\,\bar{c} + s\,\mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_x\mathbf{u}_y\,\bar{c} + s\,\mathbf{u}_z & \mathbf{u}_y^2\,\bar{c} + c & \mathbf{u}_y\mathbf{u}_z\,\bar{c} - s\,\mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_x\mathbf{u}_z\,\bar{c} - s\,\mathbf{u}_y & \mathbf{u}_y\mathbf{u}_z\,\bar{c} + s\,\mathbf{u}_x & \mathbf{u}_z^2\,\bar{c} + c \end{pmatrix}$$

$s = \sin\theta$

$c = \cos\theta$

$\bar{c} = 1 - \cos\theta$

Remarques

Matrice permettant d'aligner une direction $\mathbf{u}$ vers une autre direction $\tilde{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}\to\tilde{\mathbf{u}}} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}\times\tilde{\mathbf{u}}}\,(\cos^{-1}\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{u}}\,)$$

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

Coordonnées homogènes

Généralisation

Coordonnées homogènes dans $\mathbf{R}^4$

Unification entre point $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z, 1)$ et direction $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y, \mathbf{d}_z, 0)$

Rotation, translation, homothétie

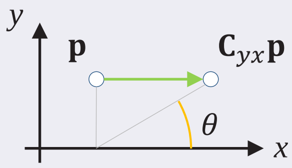
Translation

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}(s) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{t}_x \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{t}_y \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{t}_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Application linéaire

Cisaillement

$$\mathbf{C}_{yx}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\cot\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Produit matriciel $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

Les transformations ne sont généralement **pas commutatives**

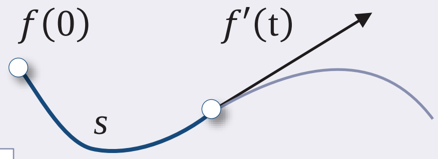
LIRIS CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Déplacement sur une trajectoire

Courbes

Courbes paramétriques $\mathbf{p} = f(\mathrm{t}),\ \mathrm{t} \in I$

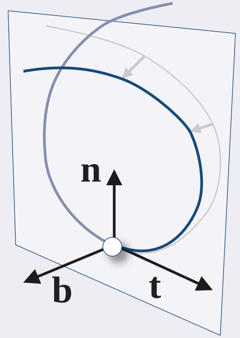
Définition d'un système $(\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n})$ local orthogonal



$\boxed{\mathbf{t} = f'(\mathrm{t})}$ Tangente

$\boxed{\mathbf{n} = f''(\mathrm{t})}$ Vecteur orthogonal à $\mathbf{t}$

$\boxed{\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}}$ Vecteur bi normal



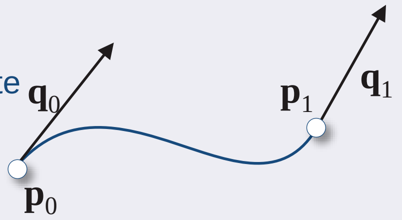
$$f'(\mathrm{t}) \approx \frac{f(t+\varepsilon) - f(t-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

$$f''(\mathrm{t}) \approx \frac{f(t+\varepsilon) - 2f(t) + f(t-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

Courbes cubiques

Hermite Spline cubique

Courbe cubique de classe C^1, contraintes de position et de tangente



$$\mathbf{p}(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)\mathbf{p}_0 + (t^3 - 2t^2 + t)\mathbf{q}_0 + (-2t^3 + 3t^2)\mathbf{p}_1 + (t^3 - t^2)\mathbf{q}_1$$

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surfaces animées

Surfaces d'élévation

Video

Déplacement des points de contrôle $\mathbf{c}(t)$ dans le temps

Animation d'une surface d'élévation $z = f(x, y, t)$

Océan

Modèle de [Max1981] selon Airy (1845) : somme de sinusoïdes déphasées

Limité aux vagues de faibles amplitudes

$$f(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i \cos(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} - \omega_i t)$$

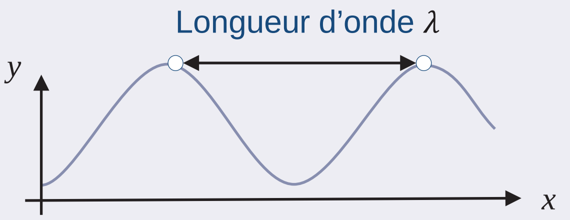
Pulsation

$\omega_i = 2\pi f$

$\mathbf{p} \in \mathbf{R}^2$

Wave number

$k = |\mathbf{k}| = 2\pi / \lambda$



Relation entre la vitesse des vagues v et la longueur d'onde λ et la profondeur d

$$\omega^2 = kg \tanh(kd)$$

$k = |\mathbf{k}|$

$$v = \sqrt{g\lambda / 2\pi \tanh(2\pi d / \lambda)}$$

Gravité

Profondeur

N. Max. Vectorized procedural models for natural terrain: Waves and islands in the sunset. In Proceedings of SIGGRAPH, 317-324, 1981

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surfaces animées

Trochoïdes

Courbe paramétrée : $\mathbf{p}(t) = (1 - \mathrm{a}\sin(t), \mathrm{a}\cos(t))$

Approximation par une surface d'élévation $z = f(x, y, t)$

$$z(\mathbf{p}, t) = -a + 2a(1 - (1/2 + 1/2 * \sin(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} - \omega_i t))^{a+1})^{1/(a+1)}$$

Vecteur encodant la **direction** et la **longueur d'onde** de la vague $k = |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$

S. Thon et al. Ocean Waves Synthesis Using a Spectrum-Based Turbulence Function. Proceedings of CGI, 2000.

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin