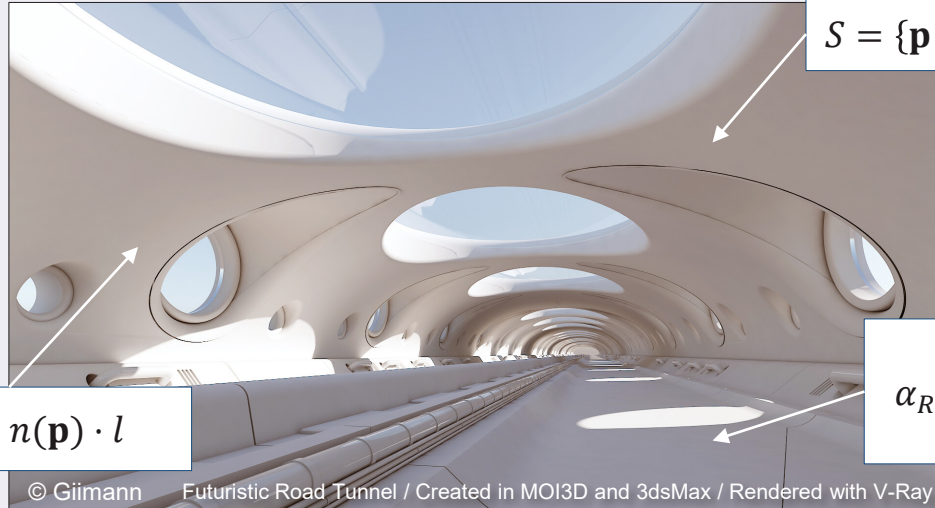


# Computer Graphics

From mathematics ...



$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$

$$d(\mathbf{p}) = n(\mathbf{p}) \cdot l$$

$$\alpha_R(\mathbf{p}) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \delta_i$$

© Giimann Futuristic Road Tunnel / Created in MOI3D and 3dsMax / Rendered with V-Ray

... to the screen

E. Galin  
Université Lyon 1

# Computer Graphics

## Mathematics

Modeling

Color and Texturing

Shading

Terrain Synthesis

Animation

# Computer Graphics

## Vectors

# Vecteurs

## Vectors

Triangles

Interpolation

Matrices

Projections

Frames

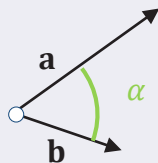
Sampling

## Fondamentaux

Vecteur  $\mathbf{a} = (x_a, y_a) \in \mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a) \in \mathbf{R}^3$

Norme  $|\mathbf{a}| = (x_a^2 + y_a^2 + z_a^2)^{1/2}$

$$s = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$$



## Produit scalaire

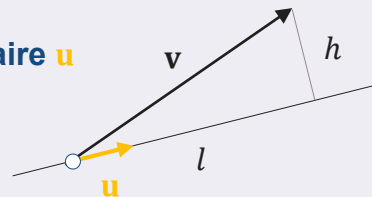
Définition  $s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

Longueur projetée d'un vecteur  $\mathbf{v}$  sur un axe  $\Delta$  de direction **unitaire**  $\mathbf{u}$

$$l = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$h = \sqrt{|\mathbf{v}|^2 - l^2}$$

Produit scalaire signé



## Produit vectoriel

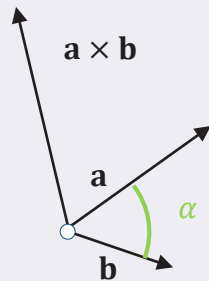
Scalaire dans le plan, vecteur dans l'espace

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = x_a y_b - y_a x_b \in \mathbf{R}$$

Dans le plan  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ -(x_a z_b - z_a x_b) \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

Dans l'espace  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  orthogonal à  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$



$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$$

P. Shirley and S. Marschner. Fundamentals of Computer Graphics. Third Edition. A.K. Peters, 2009.



eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

## Vectors

Triangles

Interpolation

Matrices

Projections

Frames

Sampling

## Distances

Distance entre deux points  $d = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$ 

Distance entre un point et une sphère

$$d(\mathbf{p}, S) = |\mathbf{p} - \mathbf{c}| - r$$

## Distance d'un point à une droite

Soit  $\mathbf{o}$  un point de  $\Delta$  de direction **unitaire**  $\mathbf{u}$ 

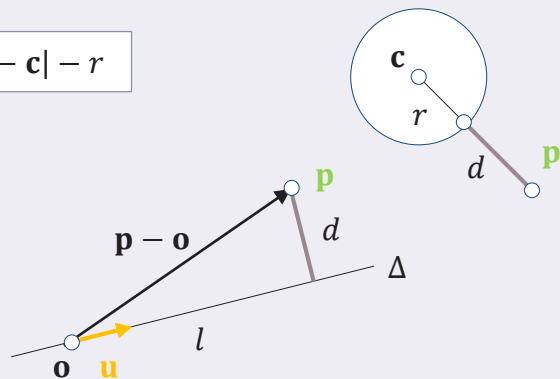
$$l = (\mathbf{p} - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{u}$$

$$d(\mathbf{p}, \Delta) = \sqrt{|\mathbf{p} - \mathbf{o}|^2 - l^2}$$

## Distance d'un point à un plan

Soit  $\mathbf{o}$  un point du plan  $\Pi$  de normale  $\mathbf{n}$ 

$$d(\mathbf{p}, \Pi) = |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{o})|$$



# Computer Graphics

## Triangles

# Triangles

Vectors

Triangles

Interpolation

Matrices

Projections

Frames

Sampling

## Caractérisation

Sommets **a b c**

Normale  $\hat{\mathbf{n}}$  unitaire (sens de parcours) et aire  $s$

$$\mathbf{n} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})$$

On définit  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/\|\mathbf{n}\|$

$$s = 1/2 \|\mathbf{n}\| = 1/2 \|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})\|$$

Norme du produit vectoriel

Coordonnées

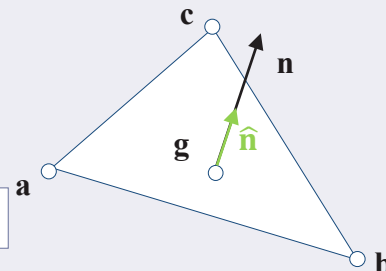
$$\mathbf{p}(x, y, z)$$

Norme

$$\|\mathbf{p}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Vecteur unitaire

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/\|\mathbf{p}\|$$



## Coordonnées barycentriques

Le barycentre de  $(\mathbf{a}, \alpha)$  et  $(\mathbf{b}, \beta)$  est l'unique point  $\mathbf{q}$  tel que  $\alpha \mathbf{q}\mathbf{a} + \beta \mathbf{q}\mathbf{b} = \mathbf{0}$

$$\text{Coordonnées } \mathbf{q} = (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) / (\alpha + \beta)$$

Le milieu de  $\mathbf{ab}$  est l'isobarycentre  $\mathbf{m} = 1/2 \mathbf{a} + 1/2 \mathbf{b}$

Lorsque  $\alpha = t$  et  $\beta = 1 - t$ ,  $t \in [0, 1]$  on retrouve l'interpolation

$$\mathbf{q}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

Généralisation à  $n$  points

Centre de gravité d'un triangle  $\mathbf{g} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/3$



eric.galin@liris.cnrs.fr  
http://liris.cnrs.fr/~egalin

# Computer Graphics

## Functions



# Interpolation

Vectors

Triangles

Interpolation

Matrices

Projections

Frames

Sampling

## Interpolation linéaire

Sur  $[0,1]$  on veut  $f$  telle que  $f(0) = a$  et  $f(1) = b$

$$f(x) = (1-x)a + xb$$

$$f(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_a} y_b + \frac{x - x_a}{x_b - x_a} y_a$$

Cas général :  $f(x_a) = y_a$  et  $f(x_b) = y_b$

## Interpolation de degré supérieur

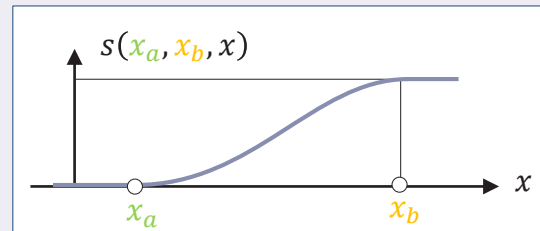
On cherche  $f \in \mathbf{R}_n[x]$  avec  $f(x_a) = y_a$  et  $f(x_b) = y_b$  et  $f^{(k)}(x_a) = y_a^k$  et  $f^{(k)}(x_b) = y_b^k$

$2n$  contraintes, polynôme de degré  $2n - 1$

Sur  $[0,1]$ , on veut  $f$  telle que  $f(0) = a$  et  $f(1) = b$  et  $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$

Cubique  $f(x) = x^2(3 - 2x)$

Quintique  $f(x) = x^3(6x^2 - 15x + 10)$



Fonction **smoothstep**

$$s(x_a, x_b, x) = f \circ c \circ v(x, x_a, x_b)$$

Cubique

Restriction

$$c(x) = \max(0, \min(x, 1))$$

Changement de variable

$$v(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_a}$$



eric.galin@liris.cnrs.fr  
http://liris.cnrs.fr/~egalin

# Interpolation

Vectors

Triangles

Interpolation

Matrices

Projections

Frames

Sampling

## Interpolation bi linéaire

Equation  $f(u, v)$  où  $(u, v) \in [0,1]^2$  et 4 contraintes aux sommet du domaine

$$f(u, v) = (1 - u)(1 - v) f(0,0) + (1 - u)v f(0,1) + u(1 - v) f(1,0) + uv f(1,1)$$

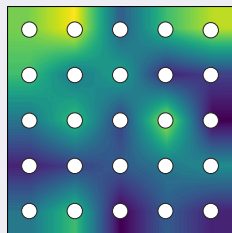
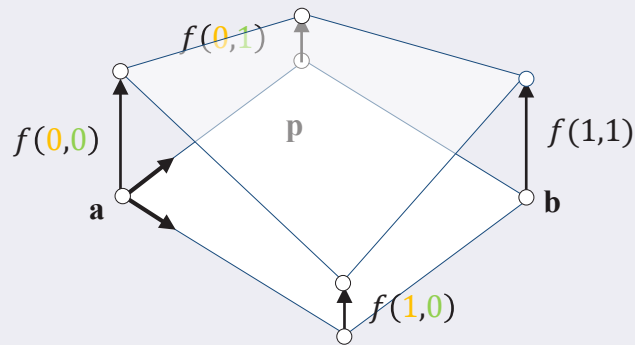
Paramétrage général sur  $(u, v) \in [u_a, u_b] \times [v_a, v_b]$

Changement de variable

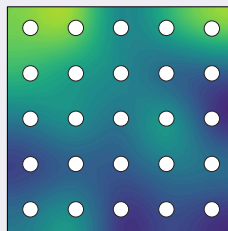
## Interpolation de degré supérieur

Plus complexe : 16 contraintes pour une bi cubique

Valeurs  $f(u, v)$ , dérivées  $\partial f / \partial u$  et  $\partial f / \partial v$   
et dérivées secondes  $\partial^2 f / \partial u \partial v$



Linéaire



Cubique



eric.galin@liris.cnrs.fr  
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

Master

# Computer Graphics

## Matrixes

# Algèbre linéaire

- Vectors
- Triangles
- Interpolation
- Matrices**
- Projections
- Frames
- Sampling

## Matrices de réels

Tableau de réels de  $l$  lignes par  $c$  colonnes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0c-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l-10} & \cdots & a_{l-1c-1} \end{pmatrix}$$

Colonnes (indicated by a yellow arrow above the matrix)

Lignes (indicated by a green arrow to the right of the matrix)

## Opérations

Somme, produit de matrice

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \mathbf{A}$$

**Ordre** des transformations important

Matrice identité, inverse

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}^{-1}$  si elle existe est telle que  
 $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

Inverse d'un produit  
 $(\mathbf{A} \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$

Transposée  $\mathbf{A}^t$  définie par  $a_{ij}^t = a_{ji}$



eric.galin@liris.cnrs.fr  
<http://liris.cnrs.fr/~egalain>

# Transformations

Vectors

Triangles

Interpolation

Matrices

Projections

Frames

Sampling

## Matrices de transformation

### Homothéties

Homothétie de vecteur  $\mathbf{s}$

$$\mathbf{S}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{s}_z \end{pmatrix}$$

### Rotations d'angle $\theta$

Rotation d'angle  $\theta$  autour des axes principaux

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{R}_u(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x^2 \bar{c} + c & \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y \bar{c} - s \mathbf{u}_z & \mathbf{u}_x \mathbf{u}_z \bar{c} + s \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y \bar{c} + s \mathbf{u}_z & \mathbf{u}_y^2 \bar{c} + c & \mathbf{u}_y \mathbf{u}_z \bar{c} - s \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_x \mathbf{u}_z \bar{c} - s \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_y \mathbf{u}_z \bar{c} + s \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_z^2 \bar{c} + c \end{pmatrix}$$

$$s = \sin \theta$$

$$c = \cos \theta$$

$$\bar{c} = 1 - \cos \theta$$



eric.galin@liris.cnrs.fr  
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

# Transformations

Vectors

Triangles

Interpolation

Matrices

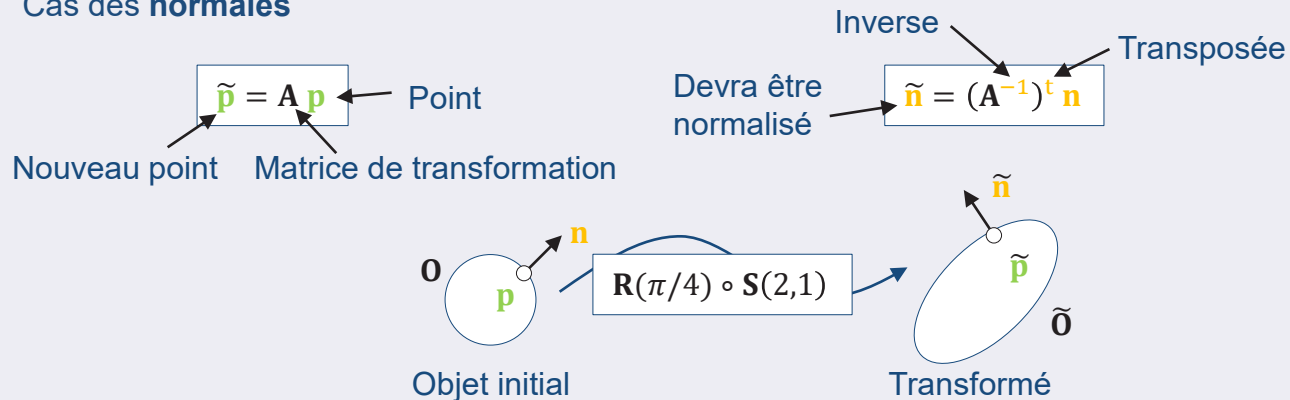
Projections

Frames

Sampling

## Application

Les **positions** résultant d'une transformation sont définies par produit matrice vecteur  
Cas des **normales**



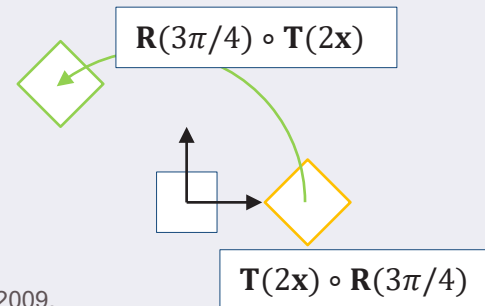
## Compositions

Les transformations sont effectuées dans le repère **canonique**  
Rotation autour de l'axe  $\Delta$  en un point d'ancrage  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{a},z}(\theta) = \mathbf{T}_{\mathbf{a}} \circ \mathbf{R}_{\Delta}(\theta) \circ \mathbf{T}_{-\mathbf{a}}$$

L'**ordre** des transformations est important

$$\mathbf{A} \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \mathbf{A}$$



P. Shirley and S. Marschner. Fundamentals of Computer Graphics. Third Edition. A.K. Peters, 2009.



eric.galin@liris.cnrs.fr  
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

# Computer Graphics

## Projection

# Camera rays

Vectors

Triangles

Interpolation

Matrices

Projections

Frames

Sampling

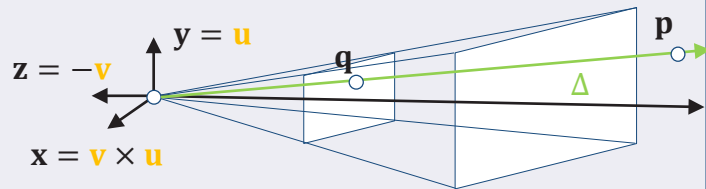
## Objectifs

Projeter un point  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$  de l'espace sur l'écran en un pixel  $\mathbf{q} \in [0, w - 1] \times [0, h - 1] \subset \mathbf{N}^2$   
Définir l'équation d'un rayon  $\Delta$  à partir d'un pixel  $\mathbf{q}$

## Caractérisation

Position  $\mathbf{e}$ , vecteur de vue  $\mathbf{v}$ , vecteur haut  $\mathbf{u}$   
Angle d'ouverture horizontal  $\alpha$ , demi angle  $\beta = \alpha/2$   
Aspect ratio  $r = w/h$   
Demi hauteur  $\tilde{h} = h/2$  et longueur  $\tilde{w} = w/2$

Rayon  $\Delta(\mathbf{e}, \mathbf{d})$  depuis un pixel  $\mathbf{q}$



$$\mathbf{d} = \tan \beta \frac{(\mathbf{q}_x - \tilde{w})}{\tilde{w}} \mathbf{x} + \frac{1}{r} \tan \beta \frac{(\tilde{h} - \mathbf{q}_y)}{\tilde{h}} \mathbf{y} + \mathbf{v}$$

Coordonnées unitaires dans l'écran

Repère local

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{v} \times \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= -\mathbf{v} \end{aligned}$$

Projection d'un point  $\mathbf{p}$  sur un pixel  $\mathbf{q}$

$$\tilde{\mathbf{q}} = \left( \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{e}) \cdot \mathbf{x}}{d \tan \beta}, \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{e}) \cdot \mathbf{u}}{d r \tan \beta} \right)$$

$$\mathbf{q} = (\tilde{w} + \tilde{w} \tilde{q}_x, \tilde{h} - \tilde{h} \tilde{q}_y)$$



eric.galin@liris.cnrs.fr  
http://liris.cnrs.fr/~egalin



# Computer Graphics

## Frames

# Repères orthonormés

- Vectors
- Triangles
- Interpolation
- Matrices
- Projections
- Frames
- Sampling

## Construction

Construction d'un repère local orthonormé  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$  à partir d'une direction  $\mathbf{n}$

Algorithme simple [Hughes1999] ou optimisé [Frisvad2012]

Si  $|\mathbf{n}_x| > |\mathbf{n}_z|$   
 $\mathbf{v} = (-\mathbf{n}_y, \mathbf{n}_x, 0)$   
Sinon  
 $\mathbf{v} = (0, -\mathbf{n}_z, \mathbf{n}_y)$   
 $\mathbf{v} = \mathbf{v} / |\mathbf{v}|$   
 $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{n}$

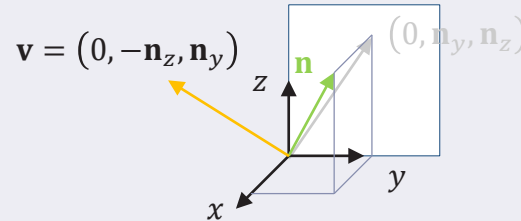
$6 \times, 3 +$

$1\sqrt{\phantom{x}}, 3/, 3 \times, 2 +$

Si  $\mathbf{n}_z > 1 - \epsilon$   
 $\mathbf{u} = \mathbf{x}$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{y}$   
Sinon si  $\mathbf{n}_z < \epsilon - 1$   
 $\mathbf{u} = -\mathbf{y}$  et  $\mathbf{u} = -\mathbf{x}$

Sinon  
 $a = 1 / (1 + \mathbf{n}_z)$   
 $b = -\mathbf{u}_x \mathbf{n}_y$   
 $\mathbf{u} = (1 - a \mathbf{n}_x^2, b, -\mathbf{n}_x)$   
 $\mathbf{v} = (b, 1 - a \mathbf{n}_y^2, -\mathbf{n}_y)$

$1/, 6 \times, 5 +$



J. F. Hughes and T. Möller. Building an Orthonormal Basis from a Unit Vector. *Journal of Graphics Tools*, 4(4), 33–35, 1999,  
J. R. Frisvad. Building an Orthonormal Basis from a 3D Unit Vector Without Normalization. *Journal of Graphics Tools*, 16(3), 151–159, 2012.



eric.galin@liris.cnrs.fr  
<http://liris.cnrs.fr/~egalain>

# Computer Graphics

## Random Samples

# Discs

Vectors

Triangles

Interpolation

Matrices

Projections

Frames

Sampling

## Random points inside

Rejection algorithm : compute  $(x, y)$  uniformly in  $[-r, r]^2$  while  $x^2 + y^2 < r^2$

Trigonometry : compute  $\rho \in [0, 1]$  and  $\theta \in [0, 2\pi]$ , we have:

$$\mathbf{p} = r\sqrt{\rho}(\cos \theta, \sin \theta)$$

## Vogel disc sampling

Spiral distribution of points  $\mathbf{p}_k, k \in [0, n - 1]$

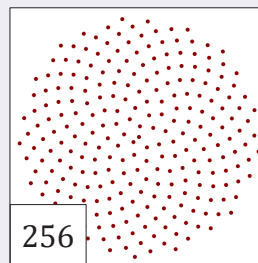
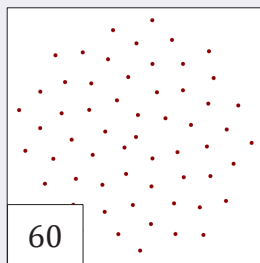
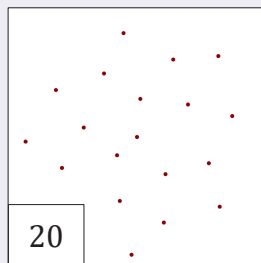
Procedural and deterministic way to sample a disc

$$\mathbf{p}_k = r\sqrt{\rho_k}(\cos \theta_k, \sin \theta_k)$$

$$\rho_k = (k + 1/2)/n$$

$$\theta_k \approx \gamma k, \text{ with } \gamma = \pi(3 - \sqrt{5}) \approx 2,4$$

Golden angle



eric.galin@liris.cnrs.fr

<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

H. Vogel. A better way to construct the sunflower head. *Mathematical Biosciences*. **44** (44), 179-189, 1979

# Sphere

Vectors

Triangles

Interpolation

Matrices

Projections

Frames

Sampling

## Random points inside

Rejection algorithm : compute  $(x, y)$  uniformly in  $[-r, r]^3$  while  $x^2 + y^2 + z^2 < r^2$

Trigonometry : compute  $\rho \in [0, 1]$  and  $(u, v) \in [0, 1]^2$ , we set:

$$\mathbf{p} = r\sqrt[3]{\rho}(\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$$

$$\theta = 2\pi u \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi = \cos^{-1}(2v - 1) \in [-\pi/2, \pi/2]$$

## Fibonacci surface sampling

Spiral distribution of points  $\mathbf{p}_k, k \in [0, n - 1]$

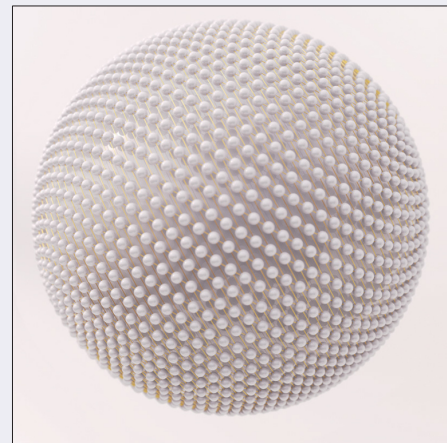
Procedural and deterministic way to sample a sphere

$$\varphi_k \approx \cos^{-1}(1 - 2k/n)$$

$$\mathbf{p}_k = r\sqrt{\rho_k}(\cos \theta_k \sin \varphi_k, \sin \theta_k \sin \varphi_k, \cos \varphi_k)$$

$$\rho_k = (k + 1/2)/n$$

$$\theta_k \approx (k + 1/2)\pi(1 + \sqrt{5})$$



eric.galin@liris.cnrs.fr  
<http://liris.cnrs.fr/~egaline>