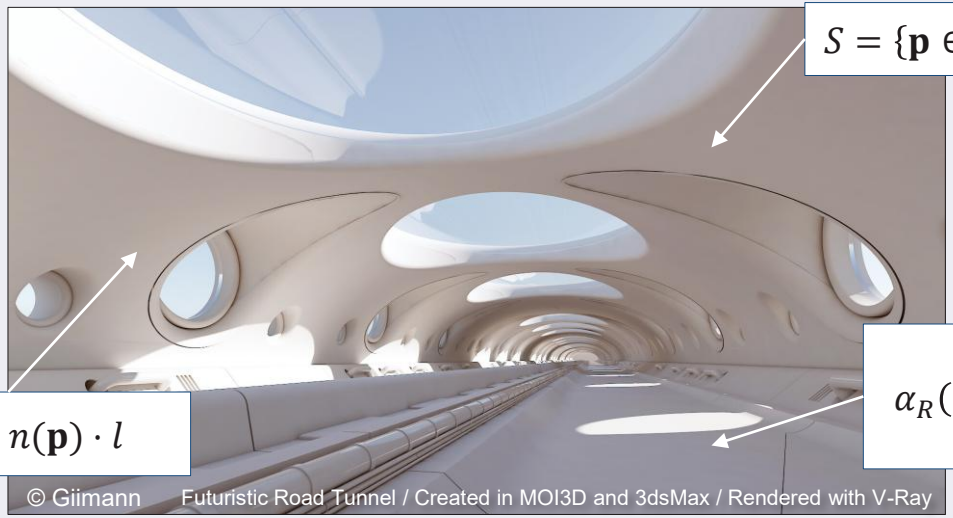
Computer Graphics

From mathematics …



… to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Mathematics

Modeling

Color and Texturing

Shading

Terrain Synthesis

Animation

Computer Graphics

Vectors

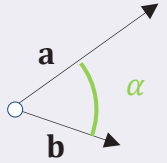
Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Fondamentaux

Vecteur $\mathbf{a} = (x_a, y_a) \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a) \in \mathbf{R}^3$

Norme $|\mathbf{a}| = (x_a^2 + y_a^2 + z_a^2)^{1/2}$

$$s = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$$



Produit scalaire

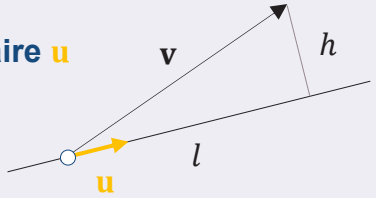
Définition $s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

Longueur projetée d'un vecteur $\mathbf{v}$ sur un axe Δ de direction **unitaire** $\mathbf{u}$

$$l = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$h = \sqrt{|\mathbf{v}|^2 - l^2}$$

Produit scalaire signé



Produit vectoriel

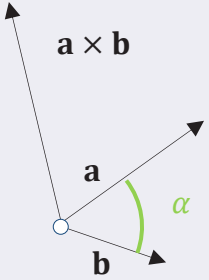
Scalaire dans le plan, vecteur dans l'espace

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = x_a y_b - y_a x_b \in \mathbf{R}$$

Dans le plan $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ -(x_a z_b - z_a x_b) \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

Dans l'espace $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ orthogonal à $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$



$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$$

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

P. Shirley and S. Marschner. Fundamentals of Computer Graphics. Third Edition. *A.K. Peters*, 2009.

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Distances

Distance entre deux points $d = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$

Distance entre un point et une sphère

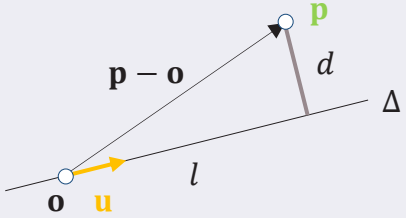
$$d(\mathbf{p}, S) = |\mathbf{p} - \mathbf{c}| - r$$

Distance d'un point à une droite

Soit $\mathbf{o}$ un point de Δ de direction **unitaire** $\mathbf{u}$

$$l = (\mathbf{p} - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{u}$$

$$d(\mathbf{p}, \Delta) = \sqrt{|\mathbf{p} - \mathbf{o}|^2 - l^2}$$



Distance d'un point à un plan

Soit $\mathbf{o}$ un point du plan Π de normale $\mathbf{n}$

$$d(\mathbf{p}, \Pi) = |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{o})|$$

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

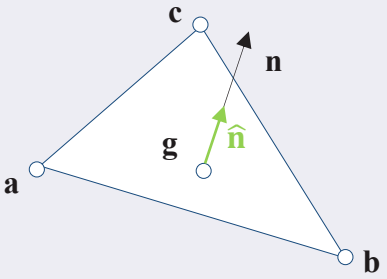
Triangles

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Caractérisation

Sommets $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$ $\mathbf{c}$

Normale $\hat{\mathbf{n}}$ unitaire (sens de parcours) et aire s



$$\mathbf{n} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})$$
On définit $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/||\mathbf{n}||$

$$s = 1/2\,|\mathbf{n}| = 1/2\,|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})|$$

Norme du produit vectoriel

Coordonnées	$\mathbf{p}(x, y, z)$
Norme	$\|\|\mathbf{p}\|\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$
Vecteur unitaire	$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/\|\|\mathbf{p}\|\|$

Coordonnés barycentriques

Le barycentre de $(\mathbf{a}, \alpha)$ et $(\mathbf{b}, \beta)$ est l'unique point $\mathbf{q}$ tel que $\alpha\ \mathbf{qa} + \beta\ \mathbf{qb} = \mathbf{0}$

Coordonnées $\mathbf{q} = (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})/(\alpha + \beta)$

Le milieu de $\mathbf{ab}$ est l'isobarycentre $\mathbf{m} = 1/2\,\mathbf{a} + 1/2\,\mathbf{b}$

Lorsque $\alpha = t$ et $\beta = 1 - t$, $t \in [0,1]$ on retrouve l'interpolation

$$\mathbf{q}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

Généralisation à n points

Centre de gravité d'un triangle $\mathbf{g} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/3$

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Functions

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Interpolation linéaire

Sur $[0,1]$ on veut f telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$

$$f(x) = (1 - x)\, a + x\, b$$

Cas général : sur $[x_a, x_b]$ on veut $f(x_a) = y_a$ et $f(x_b) = y_b$, par changement de variable

$$v(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_a}$$

Interpolation de degré supérieur

Sur $[0,1]$ on veut f telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$ et $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$

$2n$ contraintes, polynôme de degré $2n - 1$

$$f(x) = \big(1 - s(x)\big)\, a + s(x)\, b$$

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Smoothstep

Famille de fonctions de classe C^n ressemblant à une sigmoïde mais à support compact dans $[0,1]$

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^n telle que $f^k(x) = 0$ et $f^k(x_b) = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ s(x) \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

$s: [0,1] \to [0,1]$ de classe C^n telle que $f^k(x) = 0$ et $f^k(x_b) = 1$, $k \in \{0, n\}$

Cubique	$s(x) = x^2(3 - 2x)$
Quintique	$s(x) = x^3(6x^2 - 15x + 10)$
Septique	$s(x) = x^4(-20x^3 + 70x^2 - 84x + 35)$
Nonique	$s(x) = x^5(70x^4 - 315x^3 + 540x^2 - 420x + 126)$

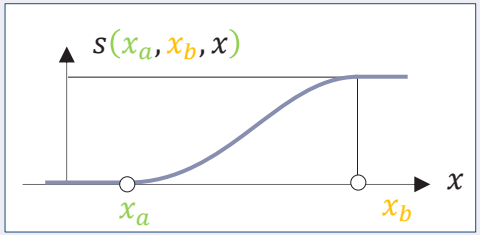
Rarissime

$$s(x_a, x_b, x) = f \circ v(x, x_a, x_b)$$

$$s(x) = x^2(3 - 2x)$$

Changement de variable

$$v(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_a}$$



Lyon1 Université
cnrs
LIRIS
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

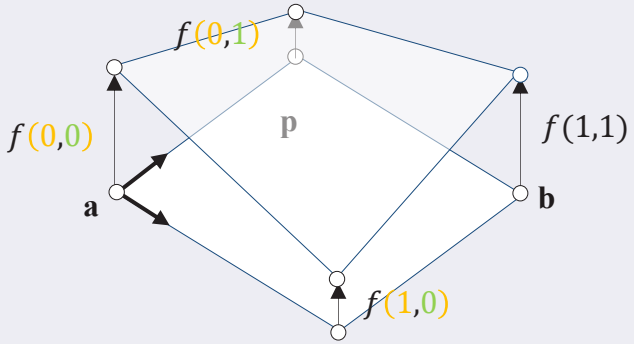
Interpolation bi linéaire

Equation $f(u,v)$ où $(u,v) \in [0,1]^2$ et 4 valeurs (contraintes) aux sommet du domaine

$$f(u,v) = (1-u)(1-v)\, f(0,0) + (1-u)v\, f(0,1) + u(1-v)\, f(1,0) + u\, f(1,1)$$

Paramétrage général sur $(u,v) \in [u_a, u_b] \times [v_a, v_b]$

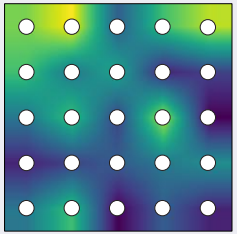
Changement de variable



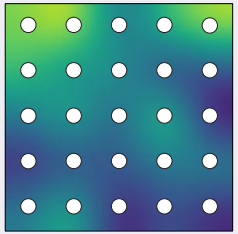
Interpolation de degré supérieur

Plus complexe : 16 contraintes pour une bi cubique

Valeurs $f(u,v)$, dérivées $\partial f/\partial u$ et $\partial f/\partial v$
et dérivées secondes $\partial^2 f/\partial u\, \partial v$



Linéaire



Cubique

Master

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Matrixes

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Matrices de réels

Tableau de réels de l lignes par c colonnes

Colonnes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0c-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l-10} & \cdots & a_{l-1c-1} \end{pmatrix}$$

Lignes

Opérations

Somme, produit de matrice

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,\mathbf{A}$$

Ordre des transformations important

Matrice identité, inverse

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}^{-1}$ si elle existe est telle que $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

Inverse d'un produit $(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Transposée $\mathbf{A}^{t}$ définie par $a_{ij}^{t} = a_{ji}$

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Matrices de transformation

Homothéties de vecteur $\mathbf{s}$

$$\mathbf{S}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{s}_z \end{pmatrix}$$

Rotations d'angle θ autour des axes principaux

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle θ autour de l'axe $\mathbf{w}$

$$\mathbf{R}_w(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_x^2\,\bar{c} + c & \mathbf{w}_x\mathbf{w}_y\,\bar{c} - s\,\mathbf{w}_z & \mathbf{w}_x\mathbf{w}_z\,\bar{c} + s\,\mathbf{w}_y \\ \mathbf{w}_x\mathbf{w}_y\,\bar{c} + s\,\mathbf{w}_z & \mathbf{w}_y^2\,\bar{c} + c & \mathbf{w}_y\mathbf{w}_z\,\bar{c} - s\,\mathbf{w}_x \\ \mathbf{w}_x\mathbf{w}_z\,\bar{c} - s\,\mathbf{w}_y & \mathbf{w}_y\mathbf{w}_z\,\bar{c} + s\,\mathbf{w}_x & \mathbf{w}_z^2\,\bar{c} + c \end{pmatrix}$$

$s = \sin\theta$

$\bar{c} = 1 - \cos\theta$

$c = \cos\theta$

Matrice de rotation entre deux vecteur unitaires $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$?
C'est $\mathrm{R}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathrm{R}_{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}(\cos^{-1}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ avec $\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}$ et $\theta = \cos^{-1}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$

Par substitution, on évite le calcul des $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\cos^{-1}\theta$ en écrivant $\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}$ et $c = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Application

Les **positions** résultant d'une transformation sont définies par produit matrice vecteur

$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{A}\,\mathbf{p}$ — Point

Nouveau point — Matrice de transformation

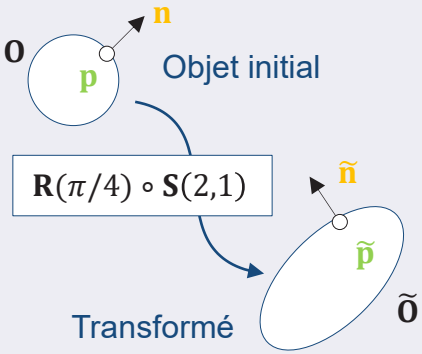
Cas des **normales**, on a besoin de l'**inverse de la transposée**

Inverse — Transposée

Devra être normalisé

$\tilde{\mathbf{n}} = (\mathbf{A}^{-1})^{t}\,\mathbf{n}$

Appendix



Compositions

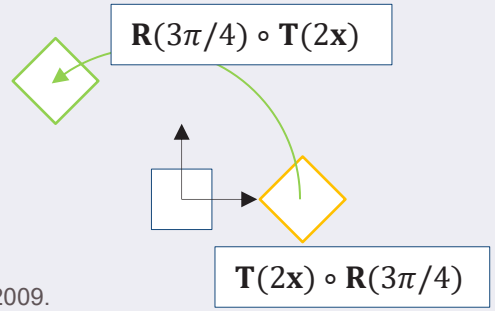
Les transformations sont effectuées dans le repère **canonique**

Rotation autour de l'axe Δ en un point d'ancrage **a**

$$\mathbf{R}_{a,z}(\theta) = \mathbf{T}_{a} \circ \mathbf{R}_{\Delta}(\theta) \circ \mathbf{T}_{-a}$$

L'**ordre** des transformations est important

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,\mathbf{A}$$



P. Shirley and S. Marschner. Fundamentals of Computer Graphics. Third Edition. *A.K. Peters*, 2009.

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Projection

Camera rays

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Objectifs

Projeter un point $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$ de l'espace sur l'écran en un pixel $\mathbf{q} \in [0, w-1] \times [0, h-1] \subset \mathbf{N}^2$

Définir l'équation d'un rayon Δ à partir d'un pixel $\mathbf{q}$

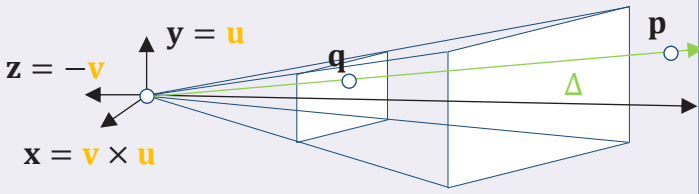
Caractérisation

Position $\mathbf{e}$, vecteur de vue $\mathbf{v}$, vecteur haut $\mathbf{u}$

Angle d'ouverture horizontal α, demi-angle $\beta = \alpha/2$

Aspect ratio $r = w/h$

Demi-hauteur $\tilde{h} = h/2$ et longueur $\tilde{w} = w/2$



Rayon $\Delta(\mathbf{e}, \mathbf{d})$ depuis un pixel $\mathbf{q}$

$$\mathbf{d} = \tan\beta \frac{(\mathbf{q}_x - \tilde{w})}{\tilde{w}} \mathbf{x} + \frac{1}{r} \tan\beta \frac{(\tilde{h} - \mathbf{q}_y)}{\tilde{h}} \mathbf{y} + \mathbf{v}$$

Coordonnées unitaires dans l'écran

Repère local

$\mathbf{x} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$

$\mathbf{y} = \mathbf{u}$

$\mathbf{z} = -\mathbf{v}$

Projection d'un point $\mathbf{p}$ sur un pixel $\mathbf{q}$

$$\tilde{\mathbf{q}} = \left(\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{e}) \cdot \mathbf{x}}{d \tan\beta}, \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{e}) \cdot \mathbf{u}}{d \, r \tan\beta} \right)$$

$$\mathbf{q} = (\tilde{w} + \tilde{w}\, \mathrm{q}_x, \tilde{h} - \tilde{h}\, \mathrm{q}_y)$$

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Frames

Repères orthonormés

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Construction

Construction d'un repère local orthonormé $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$ à partir d'une direction $\mathbf{n}$

Algorithme simple [Hughes1999] ou optimisé [Frisvad2012]

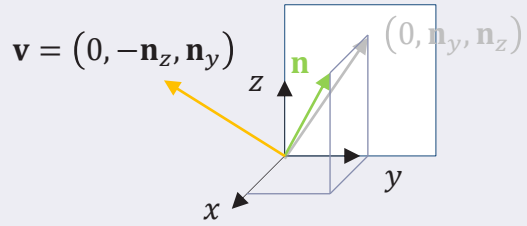
Si $|\mathbf{n}_x| > |\mathbf{n}_z|$
  $\mathrm{v} = (-\mathbf{n}_y, \mathbf{n}_x, 0)$
Sinon
  $\mathbf{v} = (0, -\mathbf{n}_z, \mathbf{n}_y)$
$\mathbf{v} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$
$\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{n}$

$6\times$, $3+$

$1\surd$, $3/$, $3\times$, $2+$

Si $\mathbf{n}_z > 1 - \varepsilon$
  $\mathbf{u} = \mathbf{x}$ et $\mathbf{u} = \mathbf{y}$
Sinon si $\mathbf{n}_z < \varepsilon - 1$
  $\mathbf{u} = -\mathbf{y}$ et $\mathbf{u} = -\mathbf{x}$
Sinon
  $a = 1/(1 + \mathbf{n}_z)$
  $b = -u\ \mathbf{n}_x\ \mathbf{n}_y$
  $\mathbf{u} = (1 - a\ \mathbf{n}_x^2, b, -\mathbf{n}_x)$
  $\mathbf{v} = (b, 1 - a\ \mathbf{n}_y^2, -\mathbf{n}_y)$

$1/$, $6\times$, $5+$



J. F. Hughes and T. Möller. Building an Orthonormal Basis from a Unit Vector. *Journal of Graphics Tools*, **4**(4), 33–35, 1999,
J. R. Frisvad. Building an Orthonormal Basis from a 3D Unit Vector Without Normalization. *Journal of Graphics Tools*, **16**(3), 151–159, 2012.

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Random Samples

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Random points inside

Rejection algorithm : compute (x, y) uniformly in $[-r, r]^2$ while $x^2 + y^2 < r^2$

Trigonometry : compute $\rho \in [0,1]$ and $\theta \in [0,2\pi]$, we have:

$$\mathbf{p} = r\sqrt{\rho}(\cos\theta\,, \sin\theta\,)$$

Vogel disc sampling

Spiral distribution of points $\mathbf{p}_k, k \in [0, n-1]$

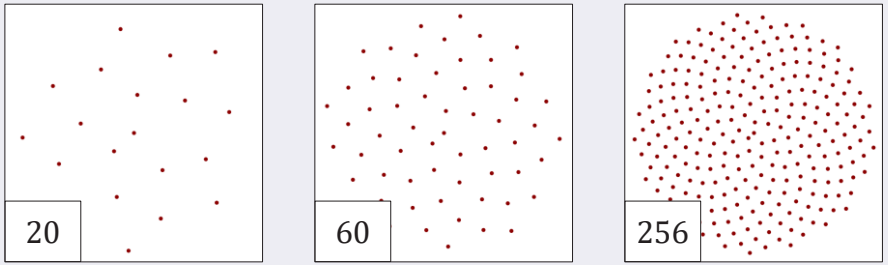
Procedural and deterministic way to sample a disc

$$\mathbf{p}_k = r\sqrt{\rho_k}(\cos\theta_k\,, \sin\theta_k\,)$$

Golden angle

$\rho_k = (k + 1/2)/n$

$\theta_k \approx \gamma\, k$, with $\gamma = \pi(3 - \sqrt{5}) \approx 2{,}4$



H. Vogel. A better way to construct the sunflower head. *Mathematical Biosciences*. **44** (44), 179-189, 1979

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Sphere

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Random points inside

Rejection algorithm : compute (x, y) uniformly in $[-r, r]^3$ while $x^2 + y^2 + z^2 < r^2$

Trigonometry : compute $\rho \in [0,1]$ and $(u, v) \in [0,1]^2$, then set:

$$\mathbf{p} = r\sqrt[3]{\rho}(\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$$

$$\theta = 2\pi u \in [0,2\pi] \qquad \varphi = \cos^{-1}(2v - 1) \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Fibonacci surface sampling

Spiral distribution of points $\mathbf{p}_k, k \in [0, n-1]$

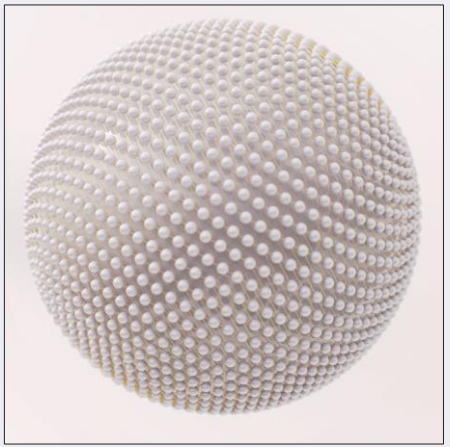
Procedural and deterministic way to sample a sphere

$$\varphi_k \approx \cos^{-1}(1 - 2k/n)$$

$$\mathbf{p}_k = r\sqrt{\rho_k}(\cos\theta_k \sin\varphi_k, \sin\theta_k \sin\varphi_k, \cos\varphi_k)$$

$$\rho_k = (k + 1/2)/n \qquad \theta_k \approx (k + 1/2)\pi(1 + \sqrt{5})$$

Simplified equations avoid unnecessary trigonometric operations



eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

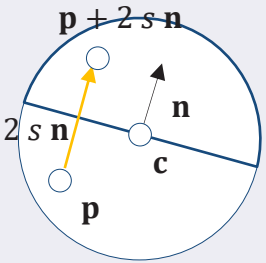
Hemisphere

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Random points inside

Rejection algorithm

Sample point inside S, compute $s = (\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n}$, if $s < 0$ set $\mathbf{p} = \mathbf{p} + 2\,s\,\mathbf{n}$



Fibonacci sampling

Change angle $\varphi_k \approx \cos^{-1}(k/n)$ in the spherical distribution to cover the hemisphere only

Simplify equation (avoid unnecessary $\cos$ and $\sin$)

$$\mathbf{p}_k = r\sqrt{\rho_k}\left(\cos\theta_k\sqrt{1-z^2}, \sin\theta_k\sqrt{1-z^2}, z\right)$$

$z \approx k/n$

$\rho_k = (k+1/2)/n$

$\theta_k \approx (k+1/2)\pi\left(1+\sqrt{5}\right)$

Lyon1 Université Claude Bernard — cnrs — LIRIS

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Intersection

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Sphère

Recherche de $\Delta \cap S$

Résolution de l'équation du second degré

$$\mathbf{d}^2 t^2 + 2(\mathbf{o}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{d}\, t + (\mathbf{o}-\mathbf{c})^2 - r^2 = 0$$

Optimisation : direction unitaire $|\mathbf{d}| = 1$

Méthode géométrique plus efficace

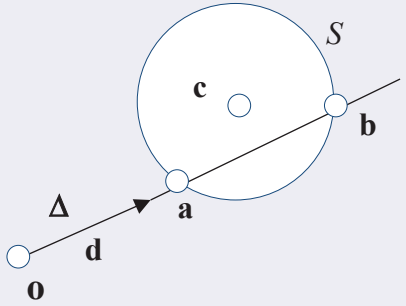
Calcul de $\mathrm{d}(\mathbf{p}(t), \Delta)^2$ et comparaison à r^2

Equation implicite de S

$$(\mathbf{p}-\mathbf{c})^2 = r^2$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + \mathbf{d}t$$

Equation paramétrique de Δ



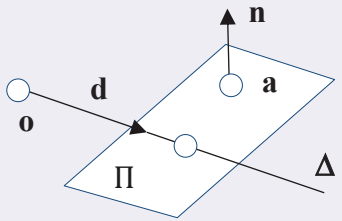
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Plan

Recherche de $\Delta \cap \Pi$
Résolution de l'équation linéaire

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}\, t + (\mathbf{o} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0$$



Equation implicite de Π

$$(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + \mathbf{d}t$$

Boîte

Intersection avec les plans Π_{yz}, Π_{xz} et Π_{xy} parallèles aux axes

Abscisse $t \in \mathbf{R}$

Intersection ray $\Delta : \mathbf{o} + \mathbf{d}t$ and $B(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
Compute $\mathbf{u} = (\mathbf{a} - \mathbf{o})/\mathbf{d}$ and $\mathbf{v} = (\mathbf{b} - \mathbf{o})/\mathbf{d}$
Compute $\mathbf{t}^- = \min(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ and $\mathbf{t}^+ = \max(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
$t_{in} = \max(\mathbf{t}_x^-, \mathbf{t}_y^-, \mathbf{t}_z^-)$ and $t_{out} = \min(\mathbf{t}_x^+, \mathbf{t}_y^+, \mathbf{t}_z^+)$
If $t_{in} < t_{out}$ and $t_{in} > 0$ return true
return false

Division membre à membre et factorisation $\mathbf{n} = \pm\mathbf{x}$ ou $\pm\mathbf{y}$ ou $\pm\mathbf{z}$

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Cylindre infini

Cylindre C_∞ caractérisé par un axe D et le rayon r

$$d^2(\mathbf{p}, D) = (\mathbf{p}-\mathbf{a})^2 - \big((\mathbf{p}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{u}\big)^2$$

Point de D — Vecteur directeur de D

Equation implicite de C_∞

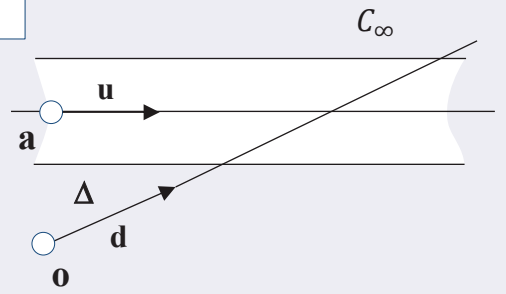
$$d(\mathbf{p}, D)^2 = r^2$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + \mathbf{d}t$$

Equation paramétrique de Δ

$$(\mathbf{d}^2 - (\mathbf{d}\cdot\mathbf{u})^2)\ t^2 + 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{d}\cdot\mathbf{u})t + \mathbf{b}^2 - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})^2 - r^2 = 0$$

On définit $\mathbf{b} = \mathbf{o} - \mathbf{a}$



Cylindre

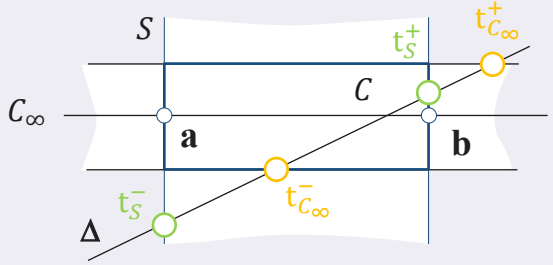
Cylindre $C = C_\infty \cap S$ intersection entre un cylindre C_∞ et un slab S

Calcul de l'intervalle d'intersection $[t^-, t^+]$

$$[t^-, t^+] = (C_\infty \cap \Delta) \cap (S \cap \Delta)$$

Cylindre — Slab

$$[t^-, t^+] = \left[\max\left(t_S^-, t_{C_\infty}^-\right), \min\left(t_S^+, t_{C_\infty}^+\right)\right]$$



eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Vectors
Triangles
Interpolation
Matrices
Projections
Frames
Sampling
Intersections

Tore

Tore défini par un centre, un axe, et deux rayons

On note $c^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{c})^2$, et $h^2 = \big((\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{u}\big)^2$ et $l^2 = c^2 - h^2$

Equation implicite de T : ensemble des points $\mathbf{p}$ vérifiant

$$(l(\mathbf{p}) - R)^2 + h(\mathbf{p})^2 = r^2$$

$$(h(\mathbf{p})^2 + l(\mathbf{p})^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2 l(\mathbf{p})^2 = 0$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + \mathbf{d}t$$

Intersection avec une droite

Résolution d'une quartique en t

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

J. Hart. Sphere Tracing: A Geometric Method for the Antialiased Ray Tracing of Implicit Surfaces. *The Visual Computer* **12**(10), 527–545,1996.

Computer Graphics

Appendix

Transformations des normales

Comatrice

Les cofacteurs d'indices ij sont définis par

$$(com\ \mathbf{A})_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$$

Sous matrice de taille $n-1$ sans la ligne i ni la colonne j de $\mathbf{A}$

Propriété avec l'inverse

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (com\ \mathbf{A})^t$$

Normales

Dans $\mathbf{R}^3$, la comatrice $com\ \mathbf{A}$ décrit l'interaction de $\mathbf{A}$ avec le produit vectoriel

Démonstration

$$\mathbf{A}\,\mathbf{u} \times \mathbf{A}\,\mathbf{v} = (com\ \mathbf{A})\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

Donc $\forall\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, en posant $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, on en déduit pour une transformation affine $\mathbf{A}$

$$\tilde{\mathbf{n}} = (com\ \mathbf{A})\ \mathbf{n} = \det \mathbf{A}\ (\mathbf{A}^{-1})^t\ \mathbf{n}$$

$$\tilde{\mathbf{n}} = (\mathbf{A}^{-1})^t\ \mathbf{n}$$

On omet $\det \mathbf{A}$ car le vecteur sera normalisé

Démonstration

En effet, $\forall x$: $(\det \mathbf{A})\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot x = (\det \mathbf{A})|\mathbf{u}, \mathbf{v}, x| = |\mathbf{Au}, \mathbf{Av}, \mathbf{A}x| = \mathbf{Au} \times \mathbf{Av} \cdot \mathbf{A}x = \mathbf{A}^t(\mathbf{Au} \times \mathbf{Av}) \cdot x$

Donc $\mathbf{A}^t(\mathbf{Au} \times \mathbf{Av}) = (\det \mathbf{A})\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{A}^t(com\ \mathbf{A})\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin