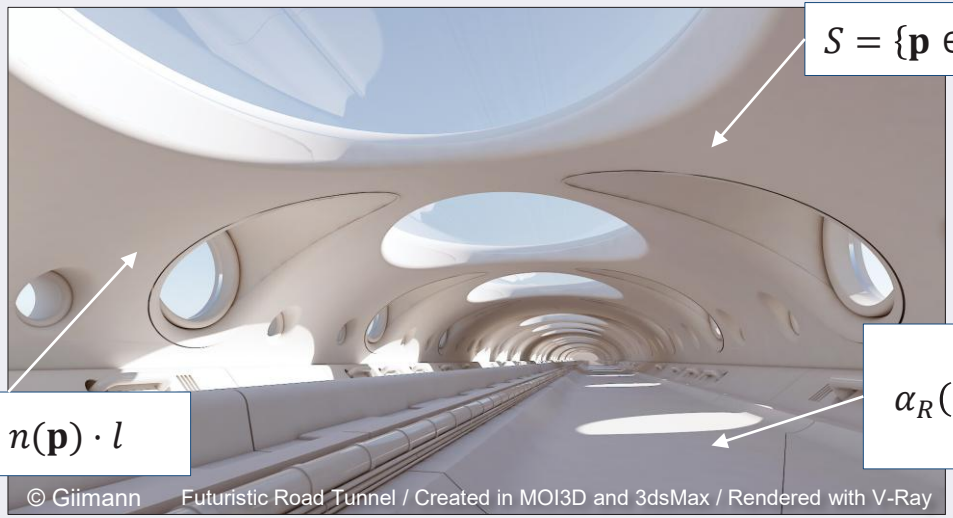
Computer Graphics

From mathematics …



… to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Mathematics

Modeling

Color and Texturing

Shading

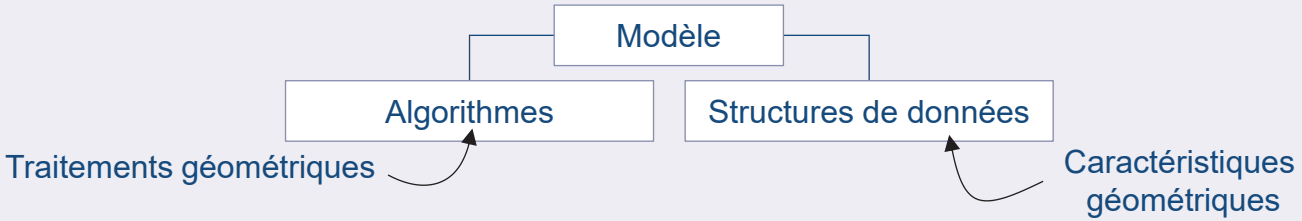
Realistic Rendering

Introduction

Classification
Surfaces
Volumes
Scene Graphs
Conclusion

Modélisation géométrique

Description de la forme et des propriétés géométriques et topologiques de l'objet
Modèles volumiques ou surfaciques



Traitements géométriques élémentaires

Intersection avec une droite $\Delta \cap O$ ou entre objets $O \cap O$
Position d'un point par rapport à l'objet $\mathbf{p} \in O$
Recherche d'un point $\mathbf{p}$ sur la surface ∂O
Affichage temps réel des triangles T sur la surface ∂O

Adapté aux requêtes surfaciques

Surfacique
Surfaces paramétrées
Subdivisions
Maillages
Champs de hauteur

Volumique
Composition arborescente
Enumération spatiale
Génération par balayage
Surfaces implicites

Adapté aux requêtes volumiques

Il n'existe **pas** de modèle universel

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Billboards
Rendering
Textured Mesh
Rendering
Volume
Collision
Navigation mesh
Animation

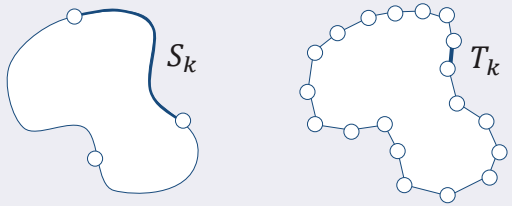
Computer Graphics

Surface models

Classification
Surfaces
Volumes
Scene Graphs
Conclusion

Définition

Représentation de la surface $S = \{S_k\}$ par morceaux
Soit peu d'équations complexes $\mathbf{p}(u, v)$, soit grand nombre d'éléments de surface T simples



Surfaces paramétrées
$S = \{\mathbf{p}(u, v), (u, v) \in \Omega\}$

Surfaces de subdivision
$S_{k+1} = \phi(S_k)$

Maillages
$M = \{G, T\}$

Compact mais sans **contrôle**

Patchs de Bézier
$\mathbf{p}(u, v)$

Contrôle sur base polynomiale

Contrôle

Général : approxime toute surface

Coûteux en **mémoire**

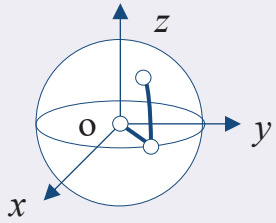
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Classification
Surfaces
Volumes
Scene Graphs
Conclusion

Définition

On définit $S = \{\mathbf{p}(u,v), (u,v) \in \Omega\}$

Différents types de surfaces selon les fonctions $\mathbf{p}(u,v)$



Sphère paramétrée

$\mathbf{p}(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\varphi)$

$(\theta,\varphi) \in [0,2\pi] \times [-\pi/2,\pi/2]$

Construction

$\mathbf{p}(u,v)$ défini par des polynômes

Construction à partir de points de contrôle $\mathbf{p}_{ij}$

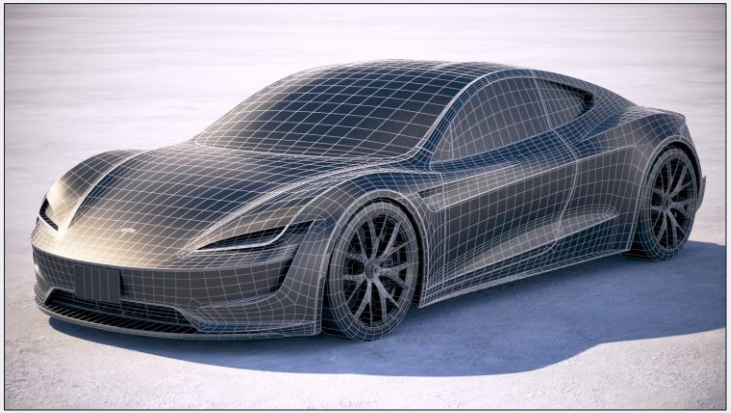
$$\mathbf{p}(u,v) = \sum_{(i,j)\in[0,n]^2} B_i^n(u) B_j^n(v)\, \mathbf{p}_{ij}$$

$$\mathbf{p}(u,v) = (u^3\ u^2\ u\ 1)\ \mathbf{M}\ [\mathbf{p}_{ij}]\ \mathbf{M}\ (v^3\ v^2\ v\ 1)^t$$

Propriétés

Régularité des carreaux

Conversion en maillage trivial



Master

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Maillages géométriques

Classification
Surfaces
Volumes
Scene Graphs
Conclusion

Maillages triangulaires

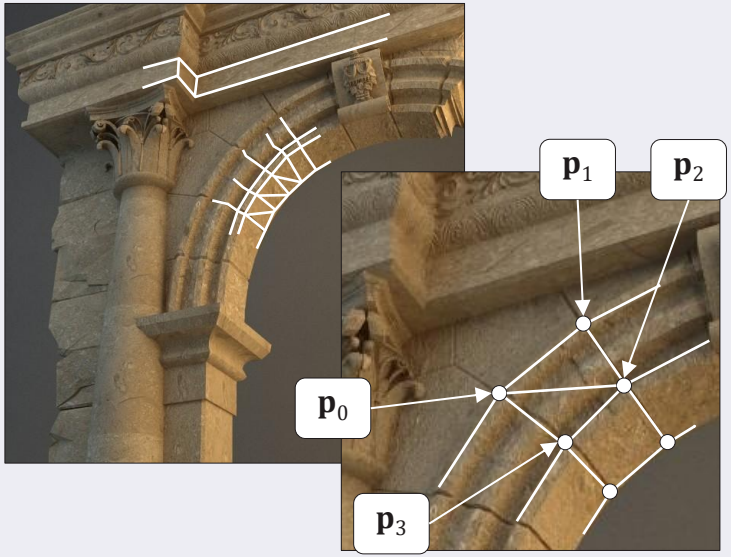
Géométrie G : sommets $\mathbf{p}$ et normales $\mathbf{n}$ ← Coordonnées $\in \mathbf{R}^3$

Topologie T : connectivité entre sommets, arêtes, faces

Structure minimale

Sommets connectés en triangles : T fixe

Triplets $\{a, b, c\}$ ou double triplet $\{a, n_a, b, n_b, c, n_c\}$ pour chaque triangle ← Indices entiers $\in \mathbf{N}$



Géométrie G	Topologie T
$\mathbf{p}_0$	0 3 2
$\mathbf{p}_1$	1 0 2
$\mathbf{p}_2$	
$\mathbf{p}_3$	

```
class Mesh {
  std::vector<Vector> p ;          // Vertexes
  std::vector<int> t ;             // Indexes
};
```


eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surfaces de subdivision

Classification
Surfaces
Volumes
Scene Graphs
Conclusion

Modélisation

Création d'une surface (à la limite S_∞ lisse) à partir d'un squelette maillé de contrôle S_0

$$S_n = \phi \circ \cdots \circ \phi(S_0)$$

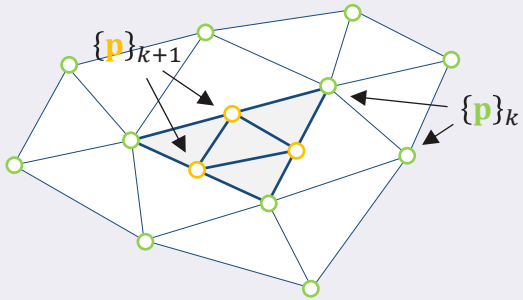
Le nombre de triangles croit de manière géométrique

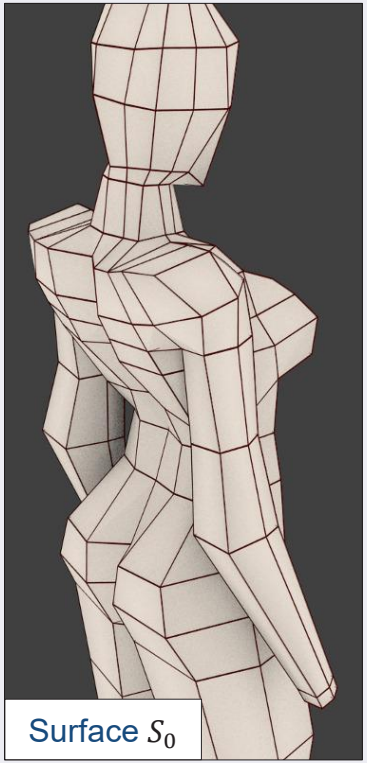
$$\#S_n = s^n \, \#S_0$$

$s = 4$ pour Loop $n \approx 4$ suffit souvent

Subdivision dyadique

Un triangle de S_k se décompose en 4 triangles de S_{k+1}
Coordonnées de $\{\mathbf{p}\}_{k+1}$ fonction des parents $\{\mathbf{p}\}_k$




Surface S_0

$\phi^2(S_0) = S_2$

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

E. Catmull and J. Clark. Recursively generated B-Spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer Aided Design,* **10**(6):350–355, 1978.

Volumetric models

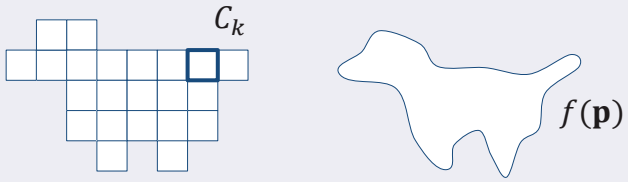
Comparaison

Classification
Surfaces
Volumes
Scene Graphs
Conclusion

Définition

Représentation du volume $\mathrm{V} = \{V_k\}$ par morceaux

Soit beaucoup de volumes simples – des cubes C, soit peu d'équations complexes $f(\mathbf{p})$



Voxels	CSG	Surfaces Implicites
$\mathrm{V} = \cup\, C_{ijk}$	$V = \cup\,(-(\cdot,\cdot), \cap\,(\cdot,\cdot))$	$V = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3 f(\mathbf{p}) < 0\}$
Unions de n^3 cubes organisés en grille	Opérateurs booléens de n formes simples	Opérateurs sur n formes complexes défini(e)s par des fonctions

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Enumération spatiale

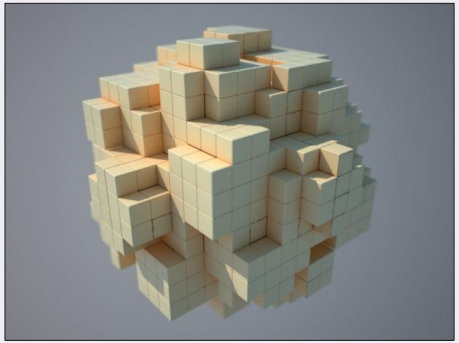
Classification
Surfaces
Volumes
Scene Graphs
Conclusion

Structure régulière

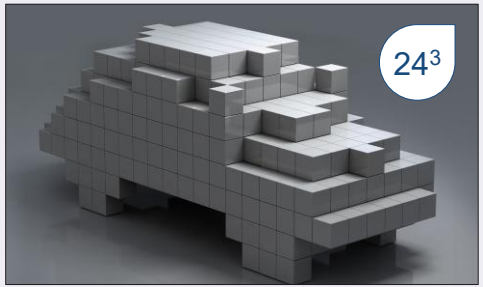
Subdivision de l'espace en grille régulière
Stockage du type de matériau dans les cellules

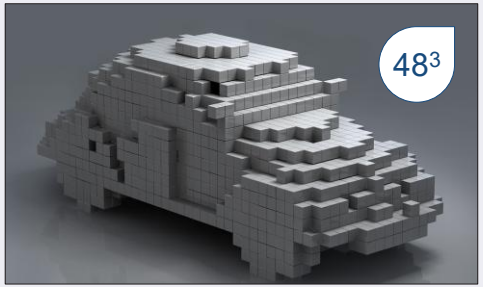
$$V = \cup C_{ijk}$$

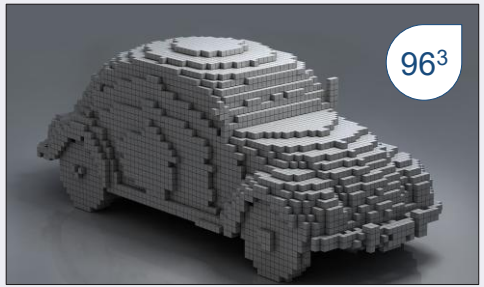
Union de cellules cubiques



Coût : $O(n^3)$ cellules, accès efficace en $O(1)$
Traitements locaux efficaces, coûteux sur l'ensemble du modèle







Lyon1 Université Claude Bernard — cnrs — LIRIS

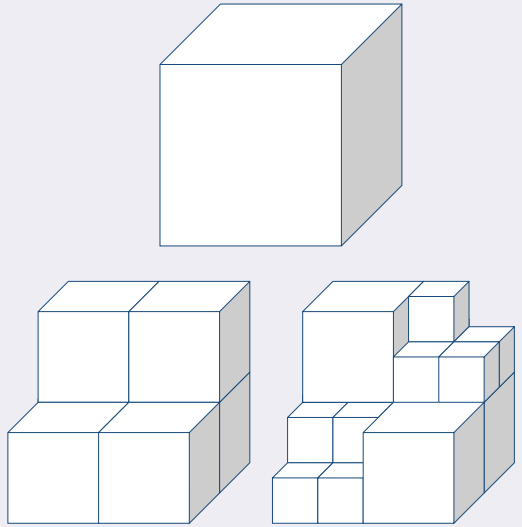
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Enumération spatiale

Classification
Surfaces
Volumes
Scene Graphs
Conclusion

Améliorations

Compression des données type run length encoding
Décomposition adaptative : octree ou sparse voxel octrees



Les Directed Acyclic Graphs gèrent traitent les redondances et motifs fréquents : $[32k - 128k]^3$

S. Laine, T. Karras. Efficient sparse voxel octrees. *Symposium on Interactive 3D Graphics and Games*, 55–63, 2010.
S. Laine, T.Karras. Efficient sparse voxel octrees. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* **17**(8), 2011.
V. Kampe, E. Sintorn, U. Assarsson. High Resolution Sparse Voxel DAGs. *Proceeding of Siggraph*, 2013.

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Classification
Surfaces
Volumes
Scene Graphs
Conclusion

Structure

Arbre de construction **hiérarchique**

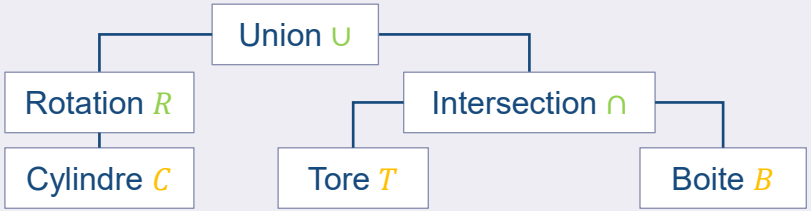
Primitives aux feuilles sont combinées par des opérateurs

$$V = \cup\left(R(C), \cap\left(T, B\right)\right)$$

Primitive

Transformation affine

Opérateur **booléen**



Master

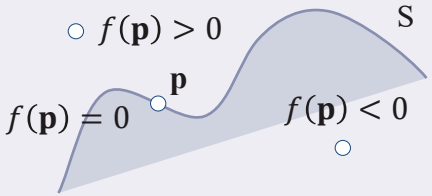
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surfaces Implicites

Classification
Surfaces
Volumes
Scene Graphs
Conclusion

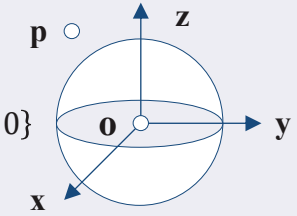
Définition

On définit $S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3 \; f(\mathbf{p}) = 0\}$



Sphère implicite

$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$



Propriétés

- Modélisation de formes lisses (raccordement)
- Objets de topologie variable
- Visualisation complexe

Catégories

- Surfaces implicites à squelettes
- Surfaces variationelles (nuages de points)

B. Wyvill, A. Guy and E. Galin. Extending the CSG Tree (Warping, Blending and Boolean Operations in an Implicit Surface Modeling System). *Computer Graphics Forum*, **18** (2), 149-158, 1999.

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Conclusion

Computer Graphics

Supplementary material

Modélisation de scènes complexes

Classification
Surfaces
Volumes
Scene Graphs
Conclusion

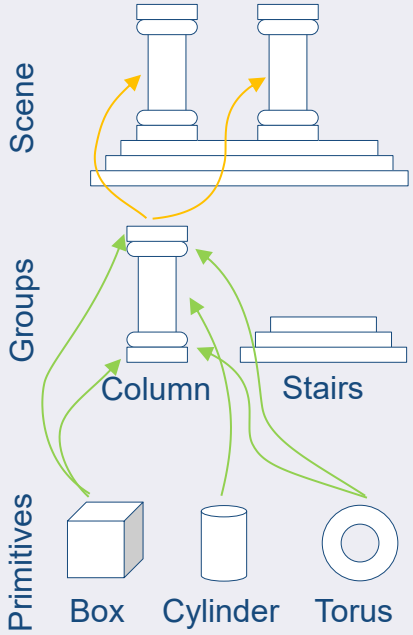
Représentation hiérarchique

Primitives aux feuilles de l'arbre

Combinaison par des opérateurs de regroupement ($\cup$) et de transformation (F)

Equivalent à union

Transformations affines **R**, **T**, **S**



Temple © Inigo Quilez

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin