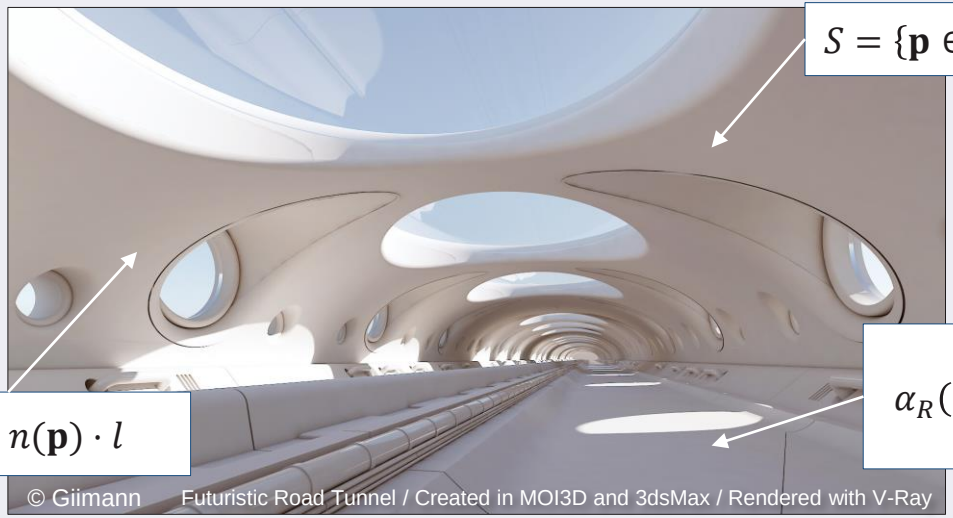
Computer Graphics

From mathematics …



… to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Mathematics

Modeling

Color and Texturing

Shading

Realistic Rendering

Acceleration

Surfaces Implicites

Surfaces implicites

Implicit Surfaces
Distance Fields
Ray Intersection
Appendix

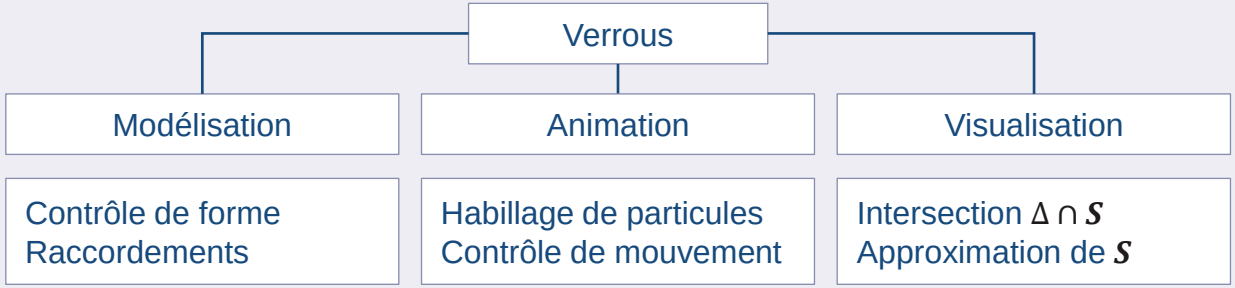
Applications

Représentation adaptée à la modélisation de volumes de géométrie et de topologie changeante

Terminator 2 Judgment day

Verrous scientifiques et techniques

Variété de formes
Représentation compacte



LIRIS cnrs
Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surfaces implicites

Implicit Surfaces
Distance Fields
Ray Intersection
Appendix

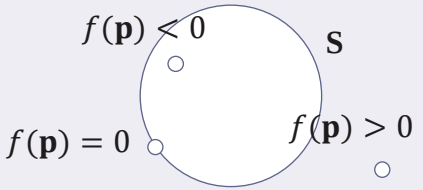
Définition

Caractérisation

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$

Si 0 valeur régulière de f, alors $f^{-1}(0)$ est une 2 variété
Convention d'intérieur de la surface $f(\mathbf{p}) < 0$

Une 2 variété **sépare** $\mathbf{R}^3$ en une surface et 2 sous domaines connexes : une région **finie** dans la surface $\mathbf{S}$ et une région **infinie** dehors (théorème de séparation)

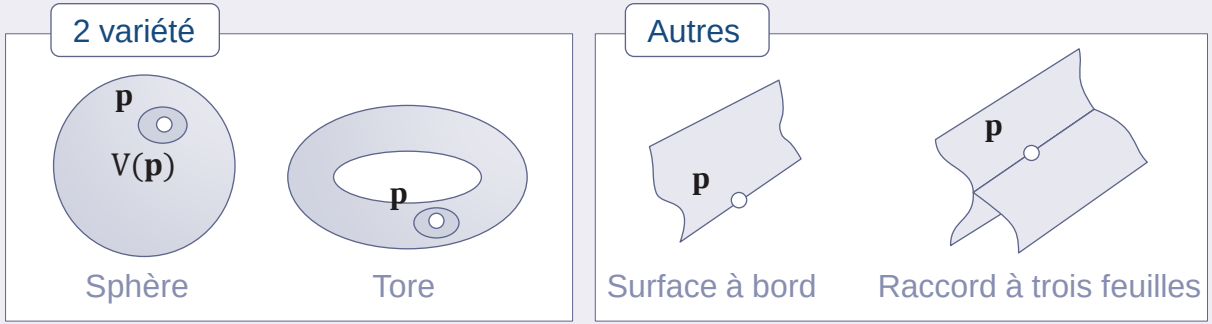


$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 - 1$$

Sphère unité

Propriétés

Formes géométriques à 2 dimensions dans $\mathbf{R}^3$
Un voisinage $\mathrm{V}(\mathbf{p})$ est équivalent à un disque



Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Gradient

Implicit Surfaces
Distance Fields
Ray Intersection
Appendix

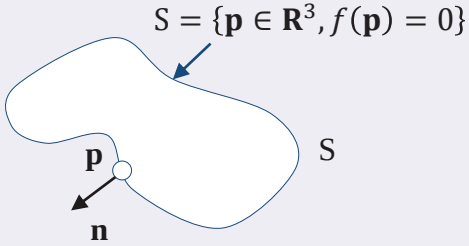
Définition et propriétés

Le gradient ∇f est le vecteur des dérivées partielles

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Approximation d'une dérivée

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x+\varepsilon, y, z) - f(x-\varepsilon, y, z)}{2\varepsilon}$$



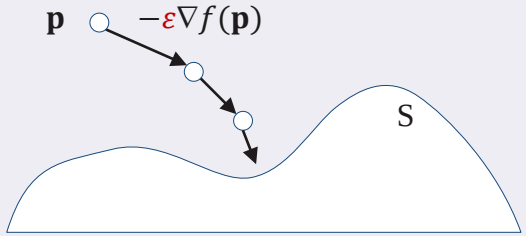
La normale $\mathbf{n}$ à la surface S dérive du gradient

$$\forall \mathbf{p} \in S \; \mathbf{n} = \nabla f(\mathbf{p}) / |\nabla f(\mathbf{p})|$$

Suivi de gradient

Projection d'un point proche de la surface sur S

Gradient descent
Start from $\mathbf{p}$
At every step
$\mathbf{p} = \mathbf{p} - \varepsilon \nabla f(\mathbf{p})$



LIRIS cnrs
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Propriété de Lipschitz

Implicit Surfaces

Distance Fields

Ray Intersection

Appendix

Définition

La fonction f doit être au moins de classe C^0 (les classes C^1 ou C^2 sont plus régulières)

f est λ −Lipschitzienne si et seulement si

$$\exists \lambda > 0 \ \ \forall (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbf{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \ |f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})| < \lambda |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$$

Propriétés

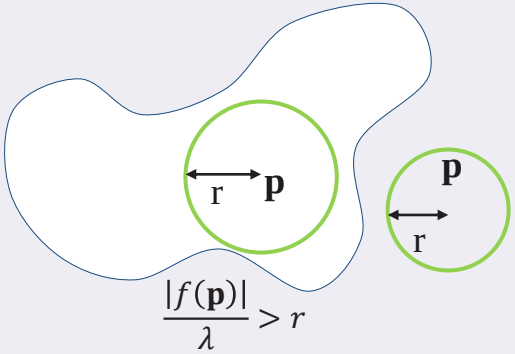
Critère d'exclusion [Hart1996]

$|f|/\lambda$ est une borne inférieure de la distance Euclidienne

Soit f une fonction λ −Lipschitzienne, alors $\forall \ \mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$

$$B(\mathbf{p}, |f(\mathbf{p})|/\lambda) \cap S = \emptyset$$

Boule de centre $\mathbf{p}$ Rayon $|f(\mathbf{p})|/\lambda$



eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

J. Hart. Sphere Tracing: A Geometric Method for the Anti aliased Ray Tracing of Implicit Surfaces, *The Visual Computer,* **12**(10), 1996

Distance Fields

Arbre de construction

Implicit Surfaces
Distance Fields
Ray Intersection
Appendix

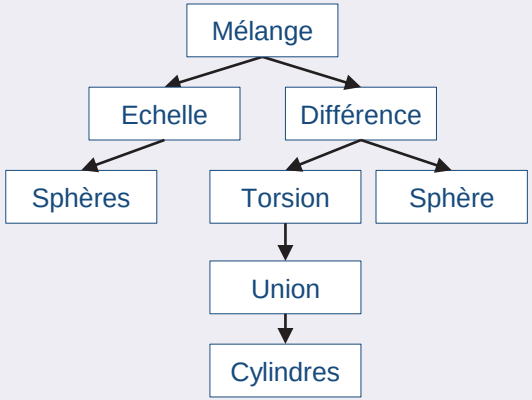
Construction

Difficulté fondamentale

Construire une expression analytique de la distance Euclidienne signée est en général **impossible**

On construit f comme une **borne inférieure** (en valeur absolue) C^0 ou 1–Lipschitzienne avec $\forall \mathbf{p}\ |f(\mathbf{p})| \leq |d(\mathbf{p}, S)|$

Combinaison hiérarchique [Wyvill1999]
Primitives aux feuilles
Opérateurs aux nœuds



Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

B. Wyvill, A. Guy, E. Galin. Extending the CSG-Tree. *Computer Graphics Forum*. **18** (4), 149 – 158, 1999

Implicit Surfaces
Distance Fields
Ray Intersection
Appendix

Distance à un squelette

Convention $f(\mathbf{p}) < 0$ si $\mathbf{p}$ dans l'objet, $f(\mathbf{p}) > 0$ dehors

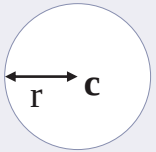
Tore, disque arrondi, barre arrondie, sphère, sphère le long d'une courbe

Vidéo

$$f(\mathbf{p}) = d(\mathbf{p}, S) - r$$

Distance au squelette

Rayon



$$f(\mathbf{p}) = ||\mathbf{p} - \mathbf{c}|| - r$$

Vidéo

Primitives polygonales (boite, pyramide) : intersections de demi espaces…

$$d(\mathbf{p}, \pi) = (\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n}$$

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Opérateurs de combinaison

Implicit Surfaces
Distance Fields
Ray Intersection
Appendix

Opérateurs booléens

Union, intersection, différence

$$f_{A\cup B}(\mathbf{p}) = \min(f_A, f_B) \qquad f_{A\cap B}(\mathbf{p}) = \max(f_A, f_B) \qquad f_{A-B}(\mathbf{p}) = \max(f_A, -f_B)$$

Mélange

Dans le domaine des Blobs, on calcule $f_A + f_B$ simplement [Wyvill1999]
Modèle plus complexe pour les distances signées

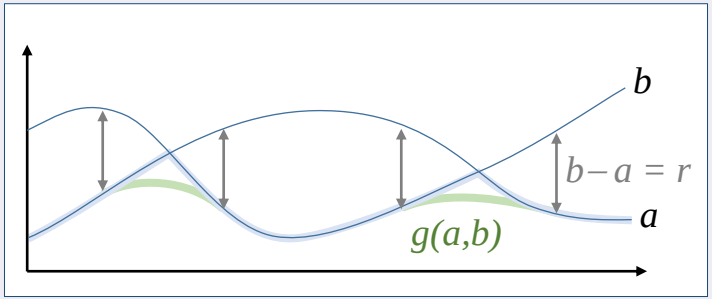
$$f_{A\cup^* B}(\mathbf{p}) = \min(f_A, f_B) - g(f_A, f_B)$$

Union — Offset

Correction $\mathrm{g}(a,b) = \frac{1}{6} r\, h^3$
avec $h = \max(r - |a-b|, 0)/r$

Rayon de mélange

Elephant © Inigo Quilez



B. Wyvill, A. Guy, E. Galin. Extending the CSG-Tree. *Computer Graphics Forum*. **18** (4), 149 – 158, 1999

LIRIS cnrs Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Transformations affines

Principe

En modélisation implicite, on déforme l'espace par la transformation inverse

$$f_{\omega(A)}(\mathbf{p}) = 1/\|J_{\omega^{-1}}\| f_A \circ \omega^{-1}$$

Norme du Jacobien

Translation, rotation, homothétie

$\|J_{\omega^{-1}}\| = 1$

$\|J_{\omega^{-1}}\| \neq 1$

$$f_{T(A)}(\mathbf{p}) = f_A \circ (\mathbf{p} - \mathbf{t})$$

Translation inverse

$$f_{R(A)}(\mathbf{p}) = f_A \circ R^{-1}(\mathbf{p})$$

Rotation inverse
$R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$

$$f_{S(A)}(\mathbf{p}) = 1/s\, f_A \circ (\mathbf{p}/s)$$

Homothétie inverse

Les compositions de transformations ne sont **pas commutatives**

Matrices de rotation

Différentes matrices selon les repères [Shirley]

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

où $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$

$$R_u(\theta) = \begin{pmatrix} x^2a + c & xya - sz & xza + sy \\ xya + sz & y^2a + c & yza - sx \\ xza - sy & yza + sx & z^2a + c \end{pmatrix}$$

où $a = 1 - \cos\theta$

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

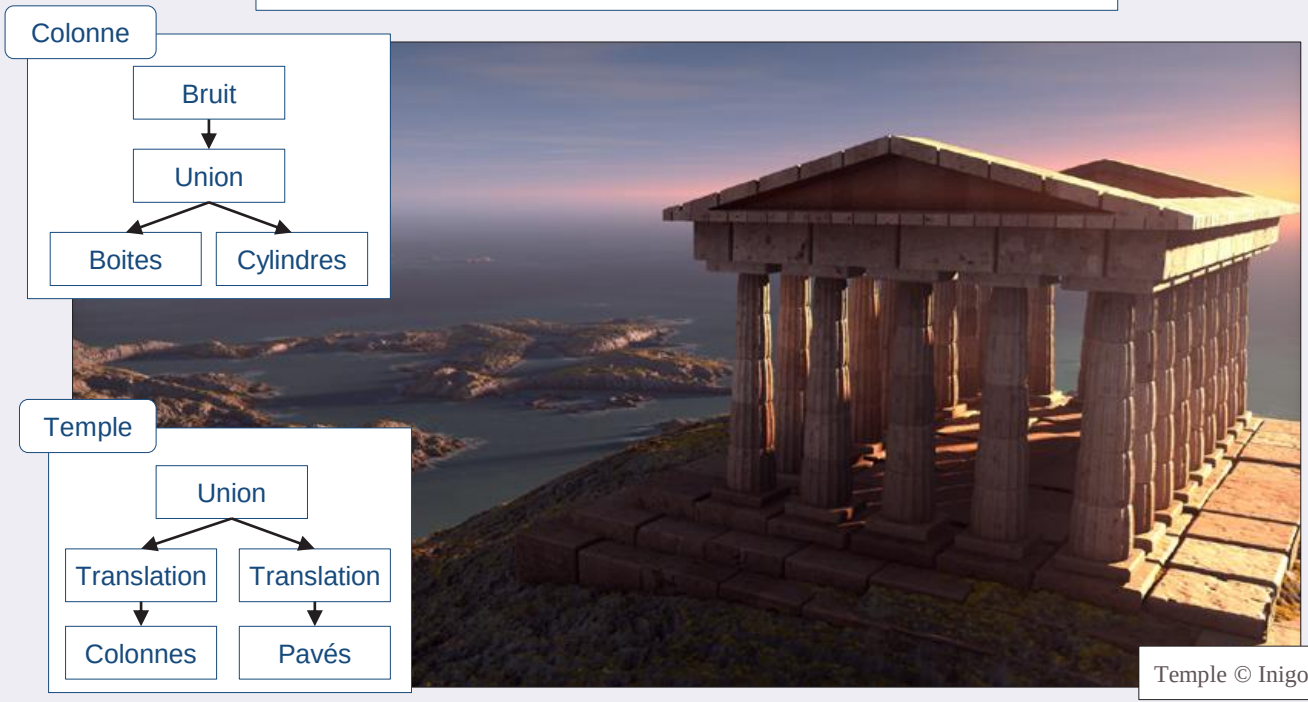
P Shirley. Fundamentals of Computer Graphics. Third Edition. AK Peters

Implicit Surfaces
Distance Fields
Ray Intersection
Appendix

Formes complexes

Construction de **formes complexes** par assemblage hiérarchique de primitives
Placement d'**instances** et composition dans le graphe de scène

Graphe de scène ⇔ Composition de fonctions ⇔ Appels



Temple © Inigo Quilez

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Déformation

Implicit Surfaces
Distance Fields
Ray Intersection
Appendix

Définition

Déformation l'espace ω
Restriction éventuelle à une région Ω

$$f_{\omega(A)}(\mathbf{p}) = f_A \circ \omega^{-1}$$

Mise en œuvre analytique

La fonction ω doit être **inversible**
Jacobien $\mathbf{J}_{\omega^{-1}}$ **complexe** pour calculer analytiquement ∇f

$$\omega_{\dot{\theta}}^{-1}(\mathbf{p}) = \omega_{-\dot{\theta}}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} cx & sy & 0 \\ -sy & cy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $c = \cos \dot{\theta} z$ et $s = \sin \dot{\theta} z$

Torsion [Barr1984]

Vitesse angulaire

Perturbation par bruit

Déplacement stochastique de $\mathbf{p}$
Fractional Brownian Motion

$$f_{\omega(A)}(\mathbf{p}) = f_A \circ (\mathbf{p} - \delta(\mathbf{p}))$$

Bruit ou turbulence

B. Wyvill, A. Guy, E. Galin. Extending the CSG-Tree. *Computer Forum*. **18** (4), 149 – 158, 1999

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Ray – Distance Field Intersection

Introduction

Implicit Surfaces
Distance Fields
Ray Intersection
Appendix

Visualization

$$S = \{\mathbf{p} \in R^3 | f(\mathbf{p}) = 0\}$$

Polygonization [Araujo2015] converts model to **large** meshes
Direct **ray tracing** remains computationally **intensive**
Parallel implementation partially alleviate the problem

Ladybug
© Inigo Quilez

LIRIS cnrs
Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Ray marching

Implicit Surfaces
Distance Fields
Ray Intersection
Appendix

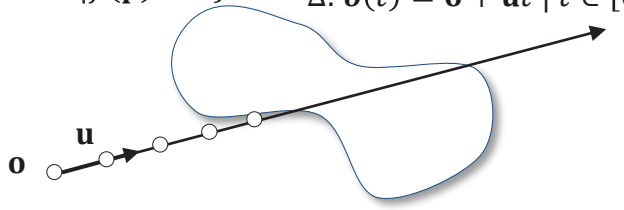
Définition

Déplacement le long du rayon Δ à **pas constant** ε [Perlin1989]
Intersection si $f(\mathbf{p})$ change de signe
Raffinement par dichotomie

Ray Marching
Start from ray origin $t = 0$
At every step
  Compute $\mathbf{p} = \mathbf{o} + \mathbf{d}t$
  If $f(\mathbf{p}) < 0$ then return t — Intersection **found**
  Otherwise step forward
  $t = t + \varepsilon$

Implicit surface S : $S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3 | f(\mathbf{p}) = 0\}$

Ray Δ : $\Delta: \boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{o} + \mathbf{u}t \mid t \in [0, \infty]$



March along the ray at positions $\mathbf{p}(t)$

Computationally **intensive** with **fixed step** [Perlin1989]

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

K. Perlin, E. Hoffert. Hypertexture. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, **23**(3), 1989.

Sphere Tracing

Implicit Surfaces
Distance Fields
Ray Intersection
Appendix

Origine

Algorithme complexe à partir des dérivées premières et secondes [Kalra1989]

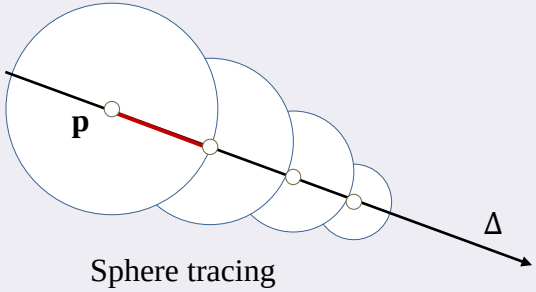
Principe

Déplacement **adaptatif** long du rayon Δ avec un pas minimum ε [Hart1989, Hart1996]
Intersection si $f(\mathbf{p})$ change de signe
Lorsque f est λ −Lipschitzienne alors $|f(\mathbf{p})|/\lambda$ est une borne de la distance Euclidienne à S

$$\forall \mathbf{p} \in \mathbf{R}^3 \; B(\mathbf{p}, |f(\mathbf{p})/\lambda|) \cap S = \emptyset$$

Sphere Tracing [Hart1996]
Start from ray origin $t = 0$
At every step
  Compute $\mathbf{p} = \mathbf{o} + \mathbf{d}t$
  If $f(\mathbf{p}) < 0$ then return t
  Otherwise step forward
  $t = t + \max(|f(\mathbf{p})|/\lambda, \varepsilon)$

Intersection **found**



Sphere tracing

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

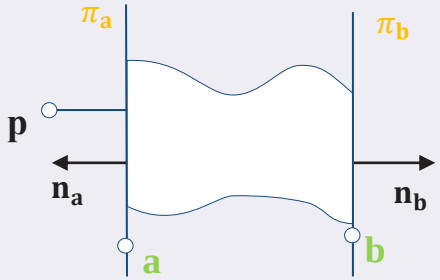
D. Kalra, H. Barr. Guaranteed Ray Intersections with Implicit Surfaces. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, **23**(3), 1989.
J. Hart. Sphere Tracing: A Geometric Method for the Antialiased Ray Tracing of Implicit Surfaces. *The Visual Computer* **12**(10), 527–545,1996.

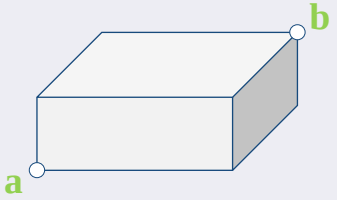
Appendix

Implicit Surfaces
Distance Fields
Ray Intersection
Appendix

Distance Euclidienne

On utilise la distance entre $\mathbf{p}$ et deux plans parallèles





$$d(\mathbf{p}, \pi_a \cap \pi_b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_x < p_x < b_x \\ a_x - p_x & \text{si } p_x < a_x \\ p_x - b_x & \text{si } p_x > b_x \end{cases}$$

$$d^2(\mathbf{p}, B) = d^2(\mathbf{p}, S_x) + d^2(\mathbf{p}, S_y) + d^2(\mathbf{p}, S_z)$$

Distance signée

Soit $\mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$ le centre, $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \mathbf{c}$ et $\mathbf{d} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/2$ la diagonale

On tire parti de la symétrie en définissant $\mathbf{q} = \text{abs}(\tilde{\mathbf{p}}) - \mathbf{d}$

0 si $\mathbf{q} \notin B$ — Maximum de $\mathbf{q}_i < 0$ si $\mathbf{q} \in B$

$$d(\mathbf{p}, B) = \min\left(\max(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z), 0\right) + |\max(\mathbf{q}, \mathbf{0})|$$

Norme Euclidienne — 0 si $\mathbf{q} \in B$ — Vecteur nul

LIRIS cnrs
Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

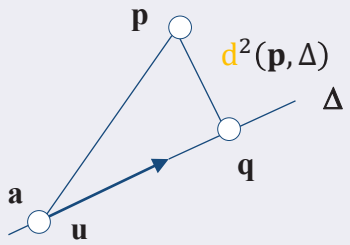
Implicit Surfaces
Distance Fields
Ray Intersection
Appendix

Distance à une droite

Pythagore dans le triangle **apq**

$$d^2(\mathbf{p},\Delta) = (\mathbf{p}-\mathbf{a})^2 - \big((\mathbf{p}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{u}\big)^2$$

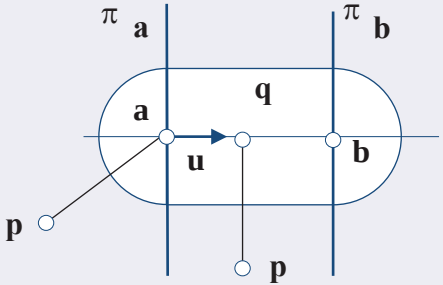
Carré de la distance



Distance à un segment

Calcul de $l = (\mathbf{p}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{u}$ où $\mathbf{u} = (\mathbf{b}-\mathbf{a})/|(\mathbf{b}-\mathbf{a})|$

$$d^2(\mathbf{p},[\mathbf{ab}]) = \begin{cases} (\mathbf{p}-\mathbf{a})^2 \text{ si } l < 0 \\ (\mathbf{p}-\mathbf{a})^2 - \big((\mathbf{p}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{u}\big)^2 \text{ si } 0 < l < |\mathbf{b}-\mathbf{a}| \\ (\mathbf{p}-\mathbf{b})^2 \text{ sinon} \end{cases}$$



Université Claude Bernard Lyon 1

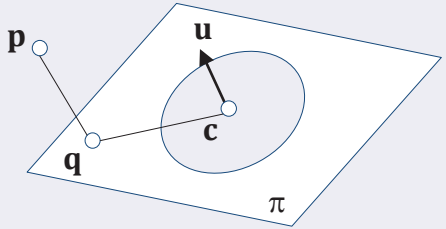
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Distance à un cercle ou un disque

Implicit Surfaces
Distance Fields
Ray Intersection
Appendix

Cercle

Par construction $d(\mathbf{p}, C)^2 = d(\mathbf{p}, \pi)^2 + \big((\mathbf{c} - \mathbf{q}) - r\big)^2$ ou $\mathbf{q}$ projeté de $\mathbf{p}$




```
double Circle::R(const Vector& p) const {
  Vector n = p – c;
  double h = n * u;
  double y = n * n – h * h ;      // Radial distance
  y = r – sqrt ( y );             // Distance to circle
  return sqrt ( y * y + h * h );
}
```

```
if ( y < r*r ) { return z; }      // Distance to disc
```

Disque

On teste si $|\mathbf{c} - \mathbf{q}| < r$: dans ce cas où l'on calcule la distance au plan π

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Implicit Surfaces
Distance Fields
Ray Intersection
Appendix

Distance d'un point à une courbe

Soit Γ une courbe d'équation paramétrée $\mathbf{c}(t)$ où $t \in [0,1]$

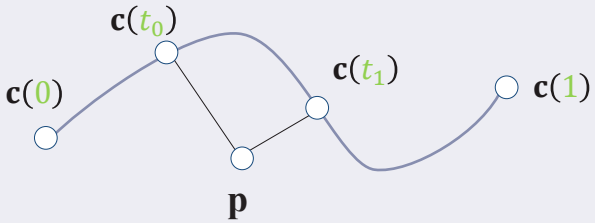
$$d^2(\mathbf{p},\Gamma) = \min_{t\in[0,1]} (\mathbf{c}(t)-\mathbf{p})^2$$

Polynôme de degré n

Recherche des racines de l'équation

$$d^2(\mathbf{p},\Gamma)' = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{c}(t)-\mathbf{p})\cdot\mathbf{c}'(t) = 0$$

Equation de degré $2n-1$ à résoudre sur $[0,1]$



Chercher le minimum de $(\mathbf{c}(t)-\mathbf{p})^2$ avec au plus $2n-1$ racines t_k et $\{0,1\}$

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin