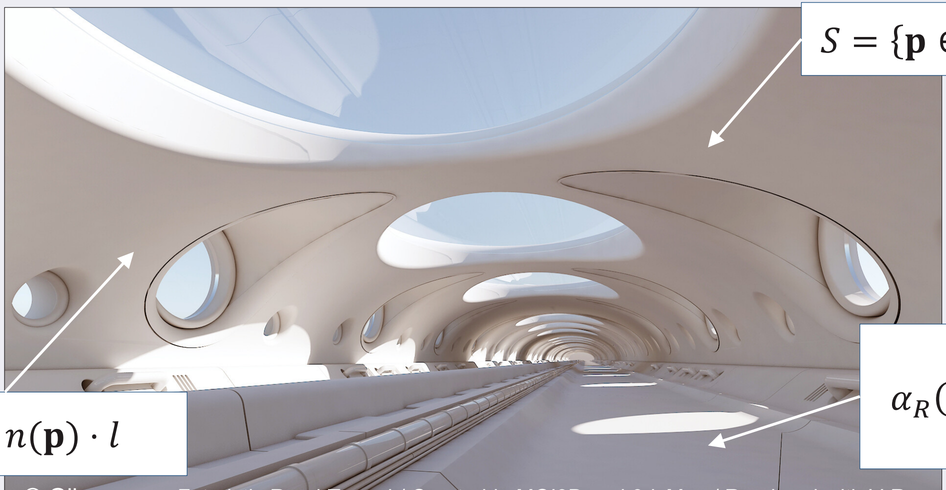
Computer Graphics

From mathematics …

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$



© Giimann Futuristic Road Tunnel / Created in MOI3D and 3dsMax / Rendered with V-Ray

$$d(\mathbf{p}) = n(\mathbf{p}) \cdot l$$

$$\alpha_R(\mathbf{p}) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \delta_i$$

… to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Mathematics

Modeling

Color and Texturing

Shading

Realistic Rendering

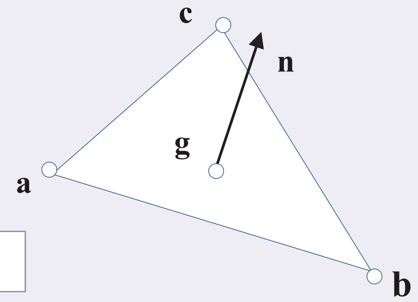
Acceleration

Computer Graphics

Triangles

Caractérisation

Sommets $\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}$
Centre de gravité $\mathbf{g} = (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})/3$
Normale $\hat{\mathbf{n}}$ unitaire (sens de parcours) et aire s



$$\mathbf{n} = (\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})$$
On définit $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$

$$s = 1/2\,|\mathbf{n}| = 1/2\,|(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})|$$

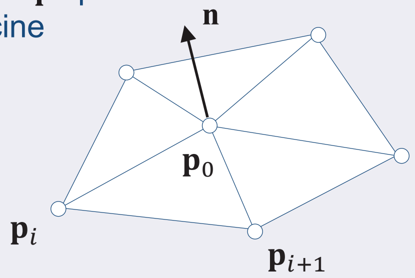
Norme du produit vectoriel

Coordonnées	$\mathbf{p}(x, y, z)$
Norme	$\|\|\mathbf{p}\|\| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$
Vecteur unitaire	$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/\|\|\mathbf{p}\|\|$

Souvent on travaille avec $\mathbf{p}^2$ pour éviter le calcul de la racine

Normale moyenne un sommet d'un maillage

$$\mathbf{n} = \sum_{i=0}^{i=n} (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_i) \times (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_{i+1})$$



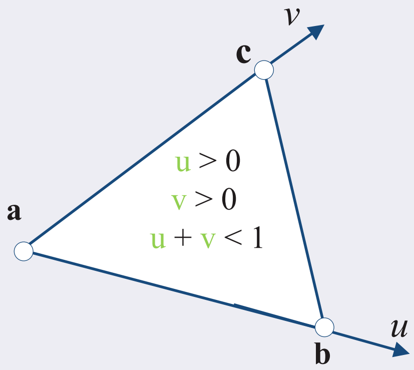
Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Classification d'un point

Trouver les solutions (u, v) de $\mathbf{p} = \mathbf{a} + u(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + v\,(\mathbf{c} - \mathbf{a})$

Les coordonnées (u, v) d'un point dans $\mathbf{abc}$ permettent d'interpoler des valeurs aux sommets



$$u = (\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})^{\perp} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})^{\perp}$$
$$v = (\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})^{\perp} \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})^{\perp}$$

```
bool Triangle::Inside(const Vector& p) const
{
 Vector ac = c - a ; // Vecteurs dans le repère de a
 Vector ab = b - a ;
 Vector ap = p - a ;

 double abab = ab * ab ; // Produits scalaires
 double abac = ab * ac ;
 double abap = ab * ap ;
 double acap = ac * ap ;

  // Coordonnée u et test de demi espace
 double u = acac * abap - abac * acap ;
 if (u<0.0) return false;

 // Coordonnée v et test de demi espace
 double abab = ab * ab ;
 double v = abab * acap - abac * abap ;
 if (v<0.0) return false;

 double d = abab * acac - abac * abac ;

 // Dernier test
 return (u + v <= d) ;
}
```

Université Claude Bernard Lyon 1

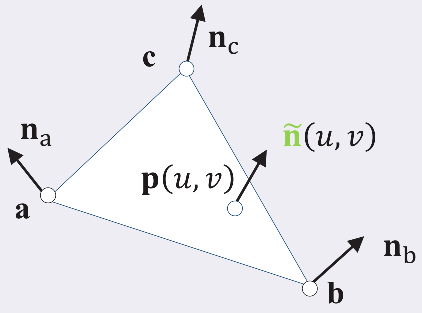
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Triangles lisses

Caractérisation

Sommets $\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}$ augmentés de normales $\mathbf{n}_a$, $\mathbf{n}_b$, et $\mathbf{n}_c$

La pseudo normale $\tilde{\mathbf{n}}(u,v)$ de T interpole $\mathbf{n}_a$, $\mathbf{n}_b$, et $\mathbf{n}_c$

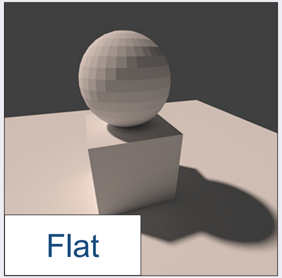


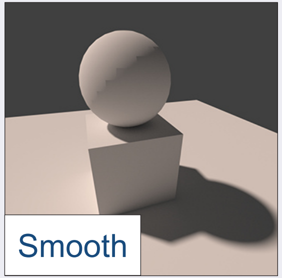
Point	$\mathbf{p} = \mathbf{a} + u\,(\,\mathbf{b} - \mathbf{a}\,) + v\,(\,\mathbf{c} - \mathbf{a}\,)$
Normale	$\tilde{\mathbf{n}} = (1-u-v)\mathbf{n}_a + u\mathbf{n}_b + v\mathbf{n}_c$

Géométrie plane
Lissage lors du rendu

Diffus
$\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}$

Spéculaire
$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}$ où $\mathbf{r} = \mathbf{l} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l})\,\mathbf{n}$





Point normal triangles

Triangles de Bézier incurvés

Géométrie obtenue à partir des sommets $\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}$ et normales $\mathbf{n}_a$, $\mathbf{n}_b$, et $\mathbf{n}_c$

Master

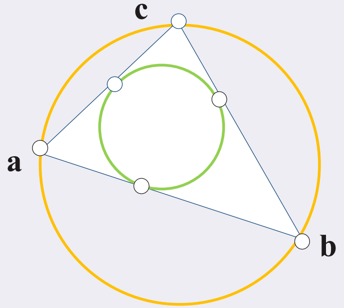
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Propriétés

Notations

Sommets $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et longueurs d'arêtes a, b, c
Demi périmètre $2s = a + b + c$

$$A^2 = \frac{abc}{4R} = rs$$



Cercles

Cercles inscrit et circonscrit

$$r^2 = \frac{A}{s} = (s-a)(s-b)(s-c)$$

$$R = \frac{abc}{4A}$$

Le centre des cercles conscrit et inscrit

Circonscrit	$\left(\mathbf{a}, a^2(b^2+c^2-a^2)\right), \left(\mathbf{b}, b^2(c^2+a^2-b^2)\right), \left(\mathbf{c}, c^2(a^2+b^2-a^2)\right)$
Inscrit	$(\mathbf{a}, a), (\mathbf{b}, b), (\mathbf{c}, c)$

L'aspect ρ définit l'aplatissement du triangle

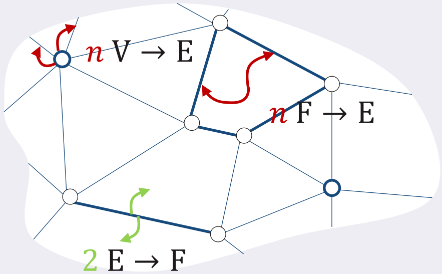
$$0 < \rho = r/R < 1/2$$

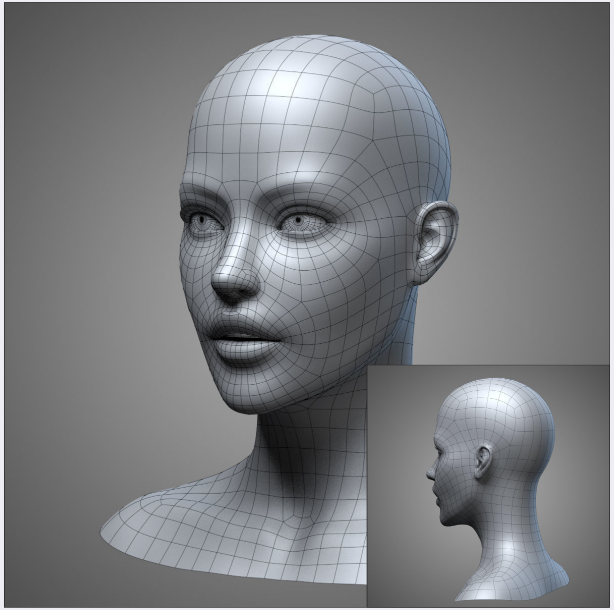
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Triangle Meshes

Structure

Géométrie G : coordonnées (sommets, normales)
Topologie T : connectivité entre sommets V, arêtes E, faces F
Le maintien de T est couteux (n F → E, n V → E,…)





Topologie

Changeante	**Constante**
Découpage	Certaines déformations
Union, différence	Transformations affines
Raffinement, simplification	**Affichage**

Nombre et connectivité
V, E, F change

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Maillages géométriques

Classification

Les informations de topologie permettent une navigation rapide

Polygons	**Indexed mesh**	**Mesh with Topology**
Général, redondant	**Stockage** réduit	Stockage augmenté
Aucune connectivité	Pas de connectivité explicite	**Connectivité** explicite

Topologie très limitée

Modèles

Différents modèles orientés arêtes, nécessitent de stocker (et mettre à jour) des listes

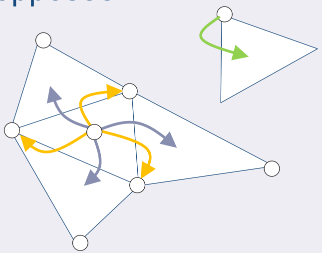
Half Edge	**Directed Edge**	**Winged Edge**
V: 1 H	$\mathcal{L}$(H), $\mathcal{L}$(V)	V: 1 E
H: 1 V, v(E)	V: 1 H	E: 2 V, 2 F, $\mathcal{L}$(E)
F: 1 V, v(H), 1 F, $\mathcal{L}$(H)	H: 1 V, v(H), 1 F	F: $\mathcal{L}$(E)

$n = 3$ pour triangles

$n = 3$ pour triangles

Structure **triangle**-vertex avec face opposée

Half Edge
V: 1 **F**
F: 3 **V**, 3 **F**



Master

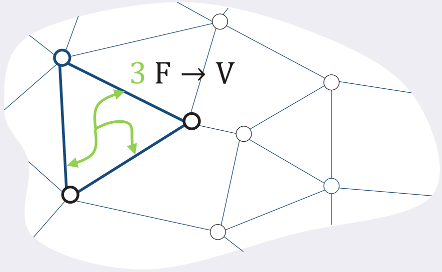
Université Claude Bernard Lyon 1

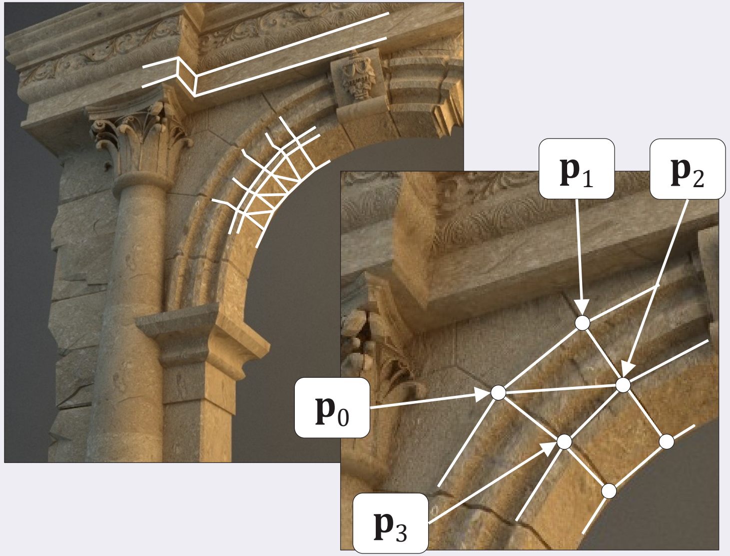
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

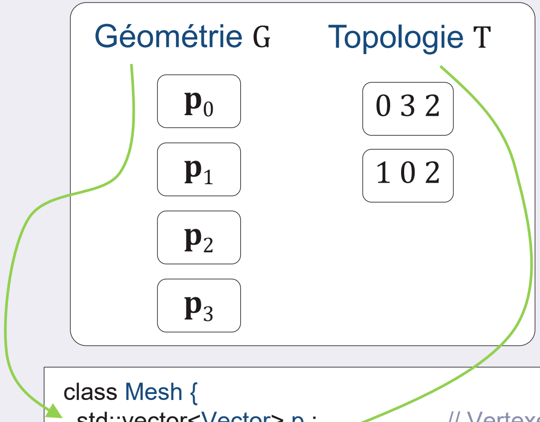
Structure topologique minimale : indexation de sommets

Maillages triangulaires à topologie constante

Géométrie contenant les sommets $\mathbf{p}_i$
Facettes F triangulaires ($3\ F \rightarrow V$)
Triplets $\{a, b, c\}$ pour chaque triangle
Indices entiers







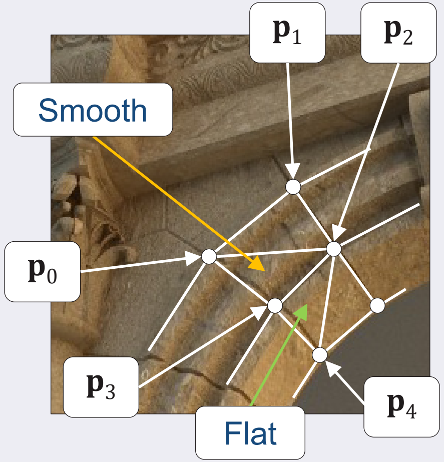

```
class Mesh {
  std::vector<Vector> p ;        // Vertexes
  std::vector<int> t ;           // Indexes
};
```

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Triangles lisses

Normales aux sommets

- Géométrie G augmentée des normales $\mathbf{n}_j$ aux sommets
- Double triplet **entrelacés** $\{a, n_a, b, n_b, c, n_c\}$ pour chaque triangle
- Triangles plats avec normales identiques, lisses avec normales différentes



Géométrie G | Topologie T

$\mathbf{p}_0$ $\mathbf{n}_0$ | 0 **0** 3 **1** 2 **2**

$\mathbf{p}_1$ $\mathbf{n}_1$ | 1 **3** 0 **3** 2 **3**

$\mathbf{p}_2$ $\mathbf{n}_2$

$\mathbf{p}_3$ $\mathbf{n}_3$

```
class Mesh {
 std::vector<Vector> p ;     // Vertexes
 std::vector<Vector> n ;     // Normals
 std::vector<int> t ;        // Indexes
};
```

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Structure

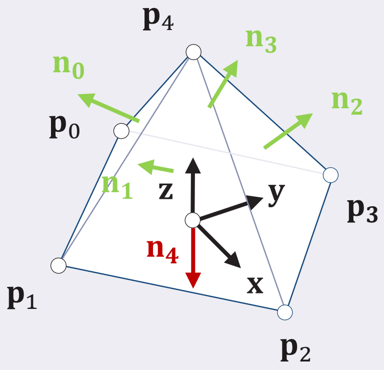
5 sommets, 4 faces triangulaires et 1 rectangulaire (donc 6 triangles)

	Géométrie G			Topologie T
$\mathbf{p}_0$	$(-a,0,0)$	$\mathbf{n}_0$	$(-\psi,-\psi,\psi)$	0 0 1 0 4 0
$\mathbf{p}_1$	$(0,-a,0)$	$\mathbf{n}_1$	$(\psi,-\psi,\psi)$	1 1 2 0 4 1
$\mathbf{p}_2$	$(+a,0,0)$	$\mathbf{n}_2$	(ψ,ψ,ψ)	2 2 3 2 4 2
$\mathbf{p}_3$	$(0,+a,0)$	$\mathbf{n}_3$	$(-\psi,\psi,\psi)$	3 3 0 3 4 3
$\mathbf{p}_4$	$(0,0,a)$	$\mathbf{n}_4$	$(0,0,-1)$	0 4 2 4 1 4
				0 4 3 4 2 4

$\psi = 1/\sqrt{3}$

Triangles plats

Rectangle plat



Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

Cône

Structure

$n+2$ sommets, dont n pour la circonférence, et 2 pour le sommet et la base
$n+1$ normales, n partagées pour la partie conique, 1 pour le disque inférieur
$2n$ triangles, dont n plats et n lisses

Géométrie G		Topologie T
$\mathbf{p}_0$	$\mathbf{n}_0$	0 0 1 1 n+1 0
⋮		⋮
$\mathbf{p}_{n-1}$	$\mathbf{n}_{n-1}$	n-1 n-1 0 0 n+1 n-1
$\mathbf{p}_n$	$\mathbf{n}_n$	0 n 1 n n n
		⋮
$\mathbf{p}_{n+1}$		n-1 n 0 n n n

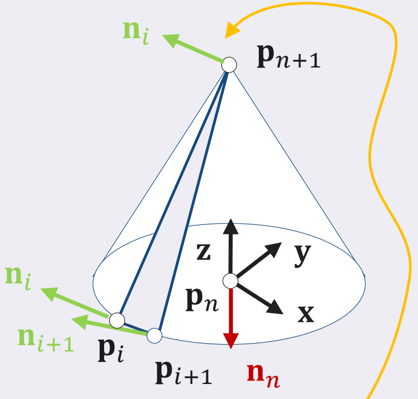
Points du cercle

Centre du cercle

Sommet

Partie conique à triangles lisses

Disque triangles **plats**



Choix pour réduire le nombre de normales

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Parametric surfaces

Formes particulières

Cylindre

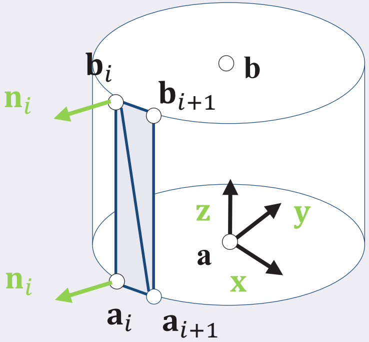
Soit C le cylindre de sommets $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, de rayon r
Paramétrage avec $(u, v) \in [0,1]^2$ par changement de variable

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + u\, h\, \mathbf{z} + r(\cos 2\pi v\, \mathbf{x} + sin 2\pi v\, \mathbf{y})$$

$h = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$
$\mathbf{z} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/h$

$\mathbf{x} = \mathbf{z}^{\perp}$

$\mathbf{y} = \mathbf{z}^{\perp} \times \mathbf{z}$



Discrétisation

Maillage de révolution de $2n$ sommets, $2n$ triangles et n normales
Tableau de sommets $\mathbf{v}$

For $i \in [0, n-1]$
  $u = i/(n-1)$
  Calculate $\mathbf{a}_i = \mathbf{a} + r(\cos 2\pi v\, \mathbf{x} + sin 2\pi v\, \mathbf{y})$
  Set $\mathbf{v}[i]$ to $\mathbf{a}_i$ and $\mathbf{v}[i+n]$ to $\mathbf{a}_i + h\, \mathbf{z}$

Géométrie G

For $i \in [0, n-1]$
  Add triangles as integer triples
  $i\, n + j, (i+1)\, n + j, i\, n + j + 1$
  $(i+1)\, n + j, i\, n + j + 1, (i+1)\, n + j + 1$

Topologie T

Prendre **modulo** n

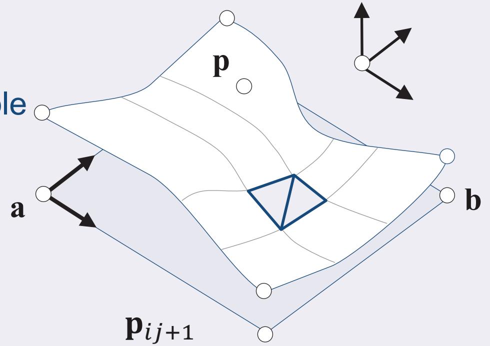
Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surfaces paramétriques

Surfaces d'élévation

Equation de type $z = h(x, y)$ où $(x, y) \in [x_\mathbf{a}, x_\mathbf{b}] \times [y_\mathbf{a}, y_\mathbf{b}]$
Paramétrage équivalent sur $(u, v) \in [0,1]^2$ par changement de variable

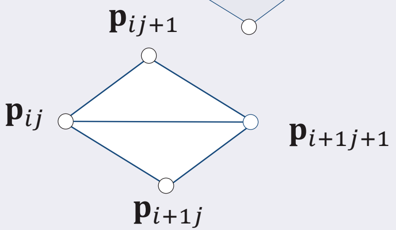


$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= h(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= (1-u)x_\mathbf{a} + u x_\mathbf{b} \\ y &= (1-v)y_\mathbf{a} + v y_\mathbf{b} \\ z &= f(u, v) \end{aligned}$$

Discrétisation régulière

Génération d'un maillage de n^2 sommets et de $2(n-1)^2$ triangles
Tableau de sommets $\mathbf{v}$



For $i \in [0, n-1]$
    For $j \in [0, n-1]$
        $u = i/(n-1)$ and $v = j/(n-1)$
        Calculate x, y, and $z = f(u, v)$
        Set $\mathbf{v}[i\,n + j]$ to $\mathbf{p}_{ij} = (x, y, z)$

Géométrie G

For $i \in [0, n-2]$
    For $j \in [0, n-2]$
        Add triangles as integer triples
        $i\,n + j, (i+1)\,n + j, (i+1)\,n + j + 1$
        $i\,n + j, (i+1)\,n + j + 1, i\,n + j + 1$

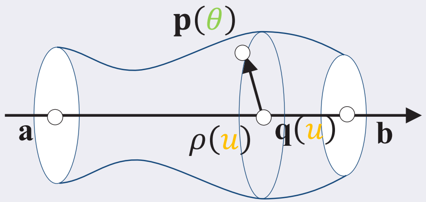
Topologie T

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surfaces paramétriques

Surfaces de révolution

Courbe $\Gamma: r = \rho(u)$, $u \in [0,1]$ et révolution autour d'un axe
Paramétrage sur $u \in [0,1]$



$$\mathbf{q}(u) = (1-u)\mathbf{a} + u\,\mathbf{b}$$
$$r = \rho(u)$$
$$\mathbf{p}(\theta) = \mathbf{q} + r(\cos\theta\,\mathbf{x} + \sin\theta\,\mathbf{y})$$

Discrétisation régulière

Génération de m sommets le long de l'axe, n points par cercle
Total de mn sommets et $2(m-1)(n-1)$ triangles

For $i \in [0, m-1]$
  $u = i/(n-1)$
  Calculate $\mathbf{q}$
  For $j \in [0, n-1]$
    Let $\theta = 2j\pi/(n-1) \in [0,2\pi]$
    Set $\mathbf{v}[i\,n + j]$ to $\mathbf{p}(\theta)$

Géométrie G

Extrusion

Balayage d'un contour le long d'une courbe directrice

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surfaces de Bézier

Carreaux

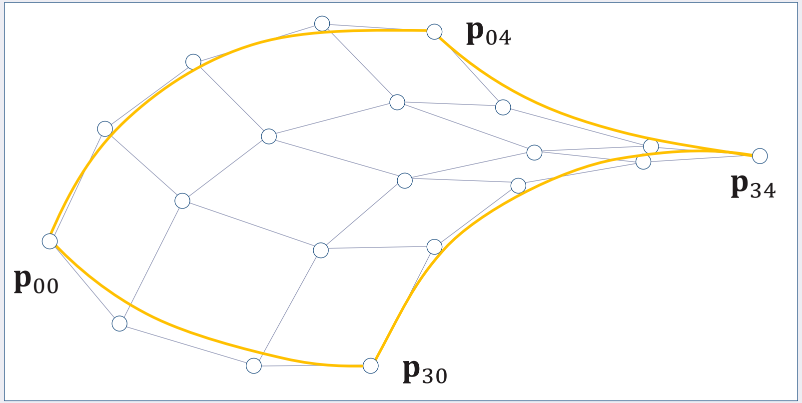
Surface produit tensoriel sur la base des polynômes de Bernstein

Points de contrôle $\mathbf{p}_{ij}$

$(u,v) \in [0,1]^2$

$$\mathbf{p}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} B_i^m(u) B_j^n(v)\, \mathbf{p}_{ij}$$

$$B_i^m(u) = C_m^i\, u^i\, (1-u)^{m-i}$$



Carreau de degré 3×4

Master

Propriétés

Enveloppe convexe

Enveloppe englobante $S \subset C(\mathbf{p}_{ij}) \subset B(\mathbf{p}_{ij})$

Normale

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v}(u,v)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u}(u,v) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n} m\left(\mathbf{p}_{i+1j} - \mathbf{p}_{ij}\right) B_i^{m-1}(u) B_j^n(v)$$

LIRIS CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Supplementary material