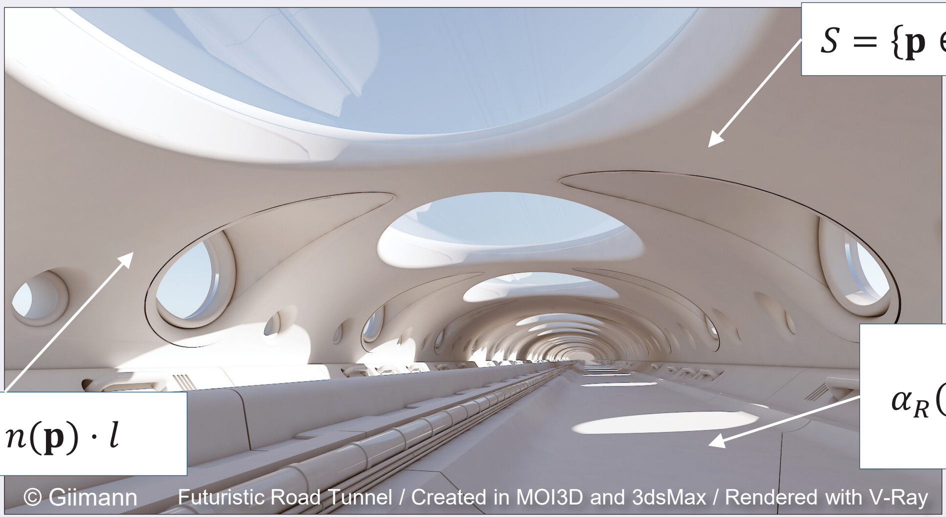
Computer Graphics

From mathematics …

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$



$$d(\mathbf{p}) = n(\mathbf{p}) \cdot l$$

$$\alpha_R(\mathbf{p}) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \delta_i$$

… to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Mathematics
Modeling
Color and Texturing
Shading
Realistic Rendering
Acceleration
Animation

Structures accélératrices

Objectif

Eviter certaines opérations coûteuses, lorsque c'est possible

Les traitements supplémentaires de sélection ou de réjection devront être minimisés

Intersection	Appartenance
$\Delta \cap A = \emptyset$? $A \cap B = \emptyset$?	$\mathbf{p} \in A$? $A \subset B$?

Rendu : lancer de rayon   Animation : détection de collision

Typologie

Subdivision de l'espace, ou classification d'objet

Spatial partitioning	**Object partitioning**
Régions disjointes	Objets disjoints
Octrees, **B**inary **S**pace **P**artitioning, grilles	Hiérarchies de volumes englobants

Analyse

Réduire le coût de nombreuses requêtes

Optimisation d'algorithmes accélérés	Organisation hiérarchique de la scène

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Low level optimization

Optimisation

Exemple : rotation

Algorithme nécessitant de trouver k point sur le cercle trigonométrique

For $k \in [0, n-1]$
 Let $t = 2\pi\, k/n$
 Compute point $\mathbf{p}(\cos\theta\,, \sin\theta)$
 Do something …

$2n$ appels à $/$

$2n$ appels à sin ou cos

$c \approx 25n$

Optimisation par le calcul de la matrice de rotation $\mathbf{R}$ d'angle $2\pi/n$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2 appels à sin ou cos

Compute $\mathbf{R}(2\pi/n)$ and set $\mathbf{p}(1{,}0)$
For $k \in [0, n-1]$
 Do something …
 Rotate with $\mathbf{p} = \mathbf{R}\,\mathbf{p}$

$4n \times$ et $2n +$

$c \approx 20 + 6n$

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

Exemple : intersection

Sphère S de centre $\mathbf{c}$ et rayon r

Equation paramétrique $\mathbf{p}(t)$ du rayon Δ

Résoudre l'équation de second degré $f \circ \delta(t) = 0$

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - \mathbf{c})^2 - r^2 = 0\}$$

$$\Delta = \{\mathbf{p}\,(t) = \mathbf{o} + \mathbf{d}t, t \in \mathbf{R}^+\}$$

Direction normalisée $|\mathbf{d}| = 1$

$$f \circ \mathbf{p}(t) = \mathbf{d}^2 t^2 + 2(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d}\, t + (\mathbf{o} - \mathbf{c})^2 - r^2 = 0$$

$c \approx 21$

$c \approx 34$

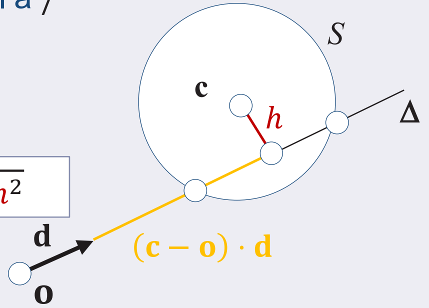
Compute coefficients $at^2 + bt + c = 0$
Compute $\delta = b^2 - 4ac$
If $\delta < 0$ no intersection
Otherwise roots $t = (-b \pm \sqrt{\delta})/2a$

1 appel à /

Méthode géométrique : calcul de $h^2 = \mathrm{d}(\mathbf{S}, \Delta)^2$ et comparaison à r^2

$$h^2 = (\mathbf{c} - \mathbf{o})^2 - \left((\mathbf{c} - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{d}\right)^2$$

$$t = (\mathbf{c} - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{d} \pm \sqrt{r^2 - h^2}$$



$c \approx 15$

$c \approx 21$

Compute h^2
If $h^2 > r^2$ no intersection
Otherwise $t = (\mathbf{c} - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{d} \pm \sqrt{r^2 - h^2}$

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Bounding volumes

Volumes englobants

Principe

Englober une géométrie complexe G par un volume simple V
Précéder les requêtes sur G d'une requête équivalente filtrante sur V

Rapide

Appartenance	**Intersection**
Si $\mathbf{p} \notin V$ alors faux	Si $\Delta \cap V = \emptyset$ alors pas d'intersection
Sinon déterminer si $\mathbf{p} \in G$	Sinon calculer $\Delta \cap G$

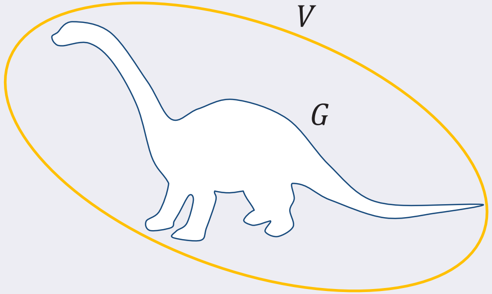
Couteux

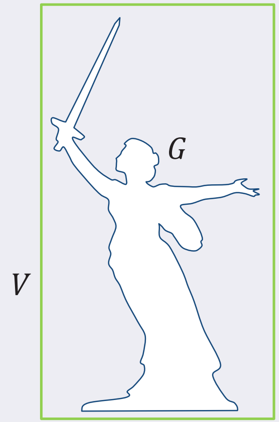
Critères de choix de volume

Mémoire, efficacité des algorithmes
Qualité d'englobement $V \supset \mathrm{G}$

$$\rho = v(G)/v(V)$$

Ratio des volumes





Fundamentals of Computer Graphics, Steve Marschner, Peter Shirley, ISBN 9780367505035, 2021 by A K Peters/CRC Press

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

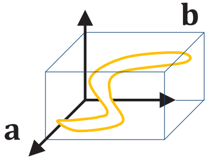
Volumes englobants

Types

Volumes de géométrie simple
Critères de compacité, vitesse de traitement, forme approximant la géométrie

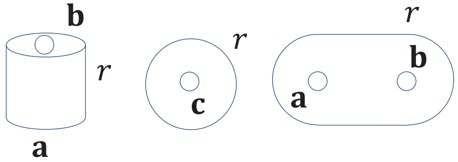
Boites

Compacte
Traitements rapides
Parfois **peu** englobant



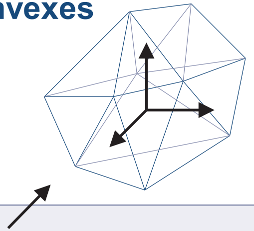
Formes arrondies

Compactes
Moins rapides
Fitting moyen



Convexes

Plus complexe
Moins rapides
Meilleur fitting



Arbre à k-dimensions : plans de directions spécifiques

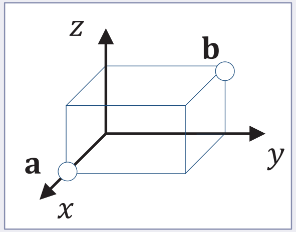
Type	Mémoire	$\Delta \cap V$	$V \cap V$
AABB	Moyen	Rapide	Rapide
OBB	Coûteux	Coûteux	Coûteux
Sphère	Faible	Rapide	Rapide
Capsule	Moyen	Moyen	Moyen
Convexe	Coûteux	Coûteux	Coûteux

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Boites

Structure

Boite alignées sur les axes du repère $B(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ compacte en mémoire



Requêtes

Appartenance

Appartenance
$\mathbf{p} \in B \Leftrightarrow x > x_a \wedge x < x_b \wedge \ ...$

Intersection avec une droite

Intersection
$[t^-, t^+] = (S_x \cap \Delta) \cap (S_y \cap \Delta) \cap (S_z \cap \Delta)$

Si $t^- > t^+$, alors $B \cap \Delta = \emptyset$

Intersection des intervalles

Intersections de Δ avec les slabs S

Intersection entre deux boites

Intersection
$B \cap B' = \emptyset \Leftrightarrow x_a \ > x'_b \vee x_b < x'_a \wedge \cdots$

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Sphère

Structure

$S(\mathbf{c}, r)$ le plus compact en mémoire

4 réels

Requêtes

Appartenance

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Appartenance}\\ \mathbf{p} \in S \Leftrightarrow |\mathbf{p}-\mathbf{c}| < r\end{array}}$$

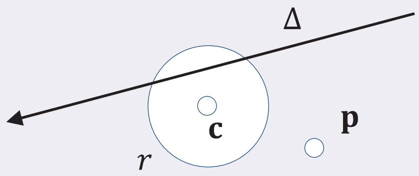
Accélération $|\mathbf{p}-\mathbf{c}|^2 < r^2$

Intersection avec une droite

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Intersection}\\ \Delta \cap S \Leftrightarrow |\delta(t)-\mathbf{c}| = r\end{array}}$$

Equation du rayon
$\delta(t) = o + dt$

Equation du second degré en t



Intersection entre deux sphères

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Collision}\\ S_a \cap S_b = \emptyset \Leftrightarrow |\mathbf{c}_a - \mathbf{c}_b| > r_a + r_b\end{array}}$$

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Convexes et polytopes

Convexe

Intersection d'un ensemble de demi plans $\pi_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{n}_i)$

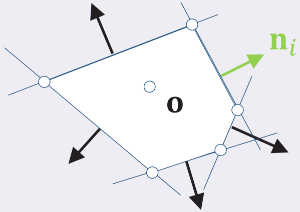
$$\mathbf{p} \in C \Leftrightarrow \forall i \in [0, k-1]\ (\mathbf{p} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_i < 0$$

$\Leftrightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_i - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i < 0$: pour éviter de stocker $\mathbf{v}_i$, on peut stocker $d_i = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i$

Polytopes

P polytope avec k directions choisies

Equivalent à l'intersection de k demi-plans π_i, $\mathrm{i} \in [0, k-1]$



Appartenance

$$\mathbf{p} \in P \Leftrightarrow \forall i \in [0, k-1]\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_i < d_i$$

Simplification du produit scalaire pour $\mathbf{n} \in \{(\pm 1, \pm 1, 0)/\sqrt{2}, (\pm 1, 0, 0), \ldots\}$

Intersection avec une droite

Intersection

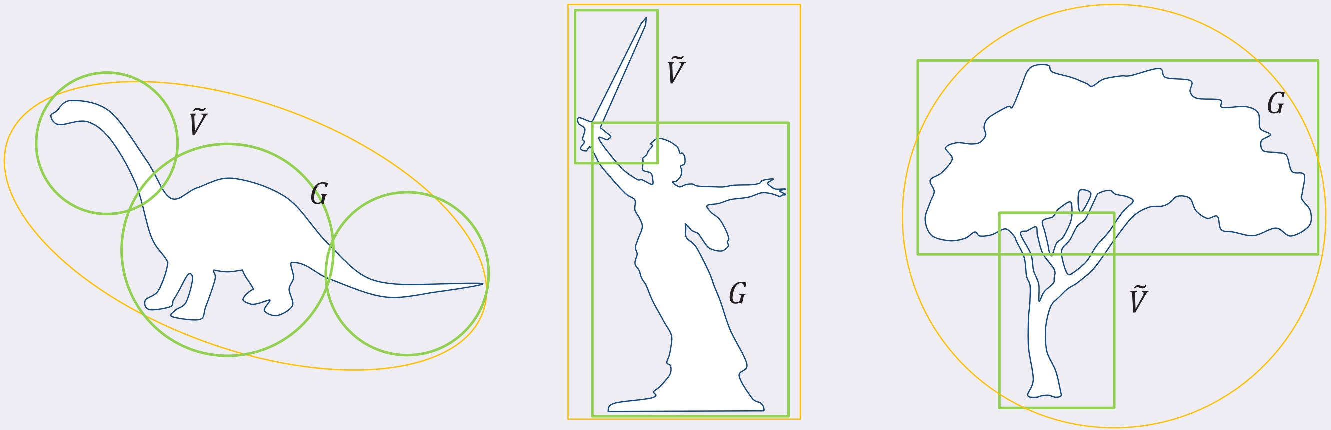
$$\Delta \cap P \Leftrightarrow \bigcap_{i=0}^{k-1} (\Delta \cap \pi_i)$$

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Volumes englobants multiples

Principe

Union d'un petit nombre ($n \approx 2 - 3$) de volumes englobants $\tilde{V}$ simples
Souvent préférable à un volume complexe

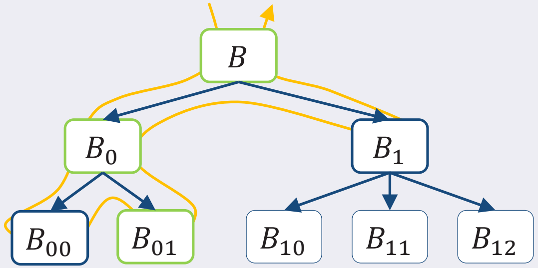


Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Object partitioning

Structure

Les volumes englobants ne réduisent pas la complexité !
Une répartition hiérarchique des objets dans un arbre la réduit à $\sim O(\ln n)$
Les nœuds portent des boîtes englobantes [Marschner2021]



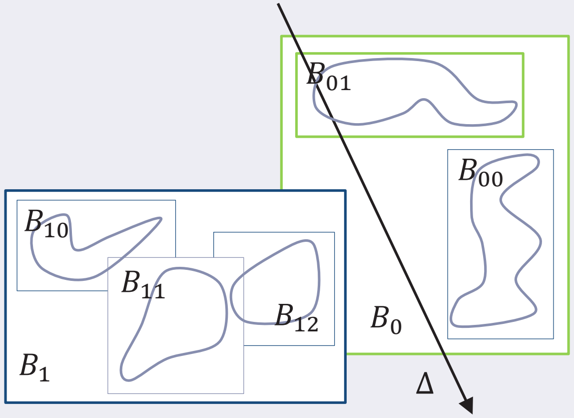
Requêtes

Appartenance

Si $\mathbf{p} \notin B$
  Pas d'appartenance
Sinon
  Descente récursive sur N_k

Intersection avec une droite

Si $\Delta \cap B = \emptyset$
  Pas d'intersection
Sinon
  Descente récursive sur N_k



Fundamentals of Computer Graphics, Steve Marschner, Peter Shirley, ISBN 9780367505035, 2021 by A K Peters/CRC Press

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Space decomposition

Décomposition spatiale

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Structure

Subdivision régulière (grille), adaptative (octree, **B**inary **S**pace **P**artitionning tree, kd tree)