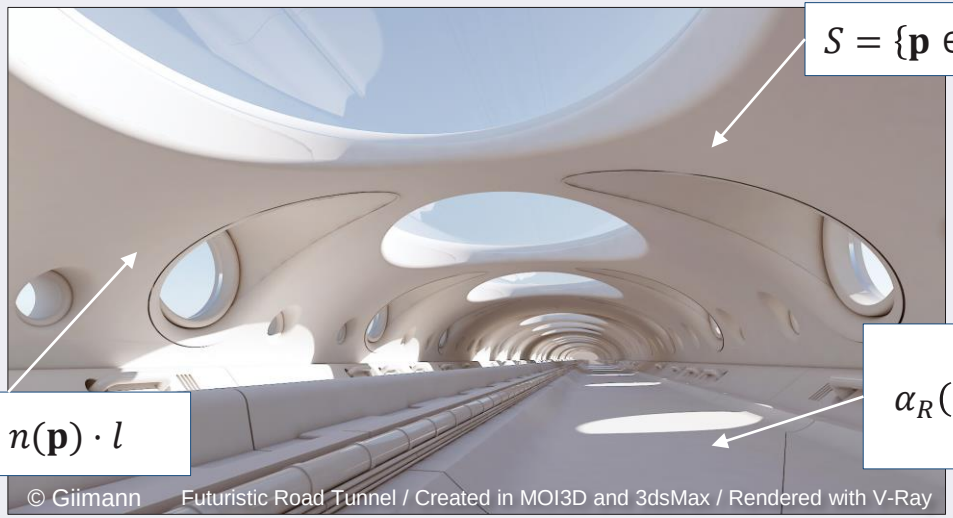
Computer Graphics

From mathematics …



… to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Mathematics
Modeling
Color and Texturing
Shading
Realistic Rendering
Acceleration
Animation
Ray Tracing

Computer Graphics

Architecture

Architecture
Camera
Intersections

Structures et notations

Camera E, générant des rayons Δ pour chaque pixel $\mathbf{p}_{ij}$
Chaque objet S_k de la scène S possède un indice k vers un matériau M_k
Lumières L

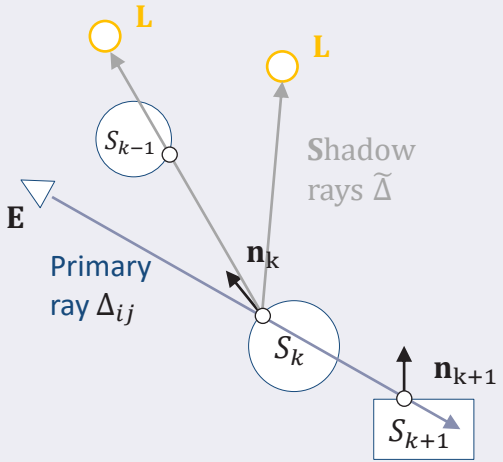
Render (E)
For all pixels $\mathbf{p}_{ij}$
Create ray Δ_{ij}
$c_{ij} \leftarrow$ **Shade** (Δ_{ij})

Shade (Δ_{ij})
X $\leftarrow$ **Intersection** (S, Δ_{ij})
$c_{ij} \leftarrow$ **Lighting** $(\Delta_{ij}, \mathrm{X})$

Lighting $(\Delta_{ij}, \mathrm{X})$
Compute c_{ij} from material (in X)
Compute **Intersection** $(S, \tilde{\Delta})$

Intersection (S, Δ_{ij})
For all objects $S_k \in S$
Compute $X_k \leftarrow$ **IntersectionType** (S_k, Δ_{ij})
Select closest intersection

IntersectionType (S_k, Δ_{ij})
Solve $t \leftarrow S_k \cap \Delta_{ij}$
Compute data for hit $X_k = \{t, \mathbf{n}, M_k\}$



Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

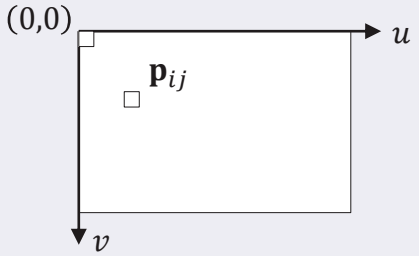
Camera

Architecture
Camera
Intersections

Définition

Matrice $w \times h$ de pixels
Pixels de couleur $\mathbf{p}_{ij}$, $(i,j) \in [0, w-1] \times [0, h-1]$
Repère conventionnel
Taille mémoire $w \times h \times n/8$

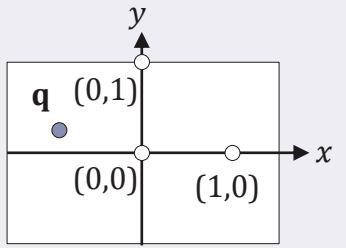
Nombre de bits par pixel



Changement de repère

Repère orthonormé centré unitaire en hauteur
Au pixel $\mathbf{p}_{ij}$ correspond le point $\mathbf{q}(x,y)$

$$x = \frac{2i}{w-1} - 1 \qquad y = 1 - \frac{2j}{h-1}$$



Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Camera rays

Objectifs

Projeter un point $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$ de l'espace sur l'écran en un pixel $\mathbf{q} \in [0, w-1] \times [0, h-1] \subset \mathbf{N}^2$

Définir l'équation d'un rayon Δ à partir d'un pixel $\mathbf{q}$

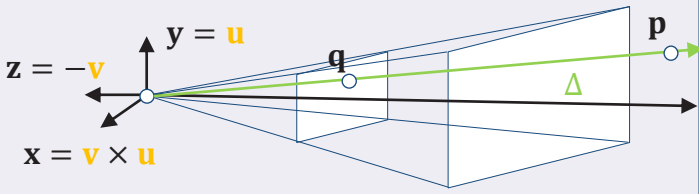
Caractérisation

Position $\mathbf{e}$, vecteur de vue $\mathbf{v}$, vecteur haut $\mathbf{u}$

Angle d'ouverture horizontal α, demi angle $\beta = \alpha/2$

Aspect ratio $r = w/h$

Demi hauteur $\tilde{h} = h/2$ et longueur $\tilde{w} = w/2$



Rayon $\Delta(\mathbf{e}, \mathbf{d})$ depuis un pixel $\mathbf{q}$

$$\mathbf{d} = \tan\beta \frac{(\mathbf{q}_x - \tilde{w})}{\tilde{w}} \mathbf{x} + \frac{1}{r} \tan\beta \frac{(\tilde{h} - \mathbf{q}_y)}{\tilde{h}} \mathbf{y} + \mathbf{v}$$

Coordonnées unitaires dans l'écran

Repère local

$\mathbf{x} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$

$\mathbf{y} = \mathbf{u}$

$\mathbf{z} = -\mathbf{v}$

LIRIS cnrs
Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Intersections

Sphère

Exemple : intersection

Sphère S de centre $\mathbf{c}$ et rayon r

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}-\mathbf{c})^2 - r^2 = 0\}$$

Equation paramétrique $\mathbf{p}(t)$ du rayon Δ

$$\Delta = \{\mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + \mathbf{d}t, t \in \mathbf{R}^+\}$$

Résoudre l'équation de second degré $f \circ \delta(t) = 0$

Direction normalisée $|\mathbf{d}| = 1$

$$f \circ \mathbf{p}(t) = \mathbf{d}^2 t^2 + 2(\mathbf{o}-\mathbf{c}) \cdot \mathbf{d}\, t + (\mathbf{o}-\mathbf{c})^2 - r^2 = 0$$

$c \approx 21$
$c \approx 34$

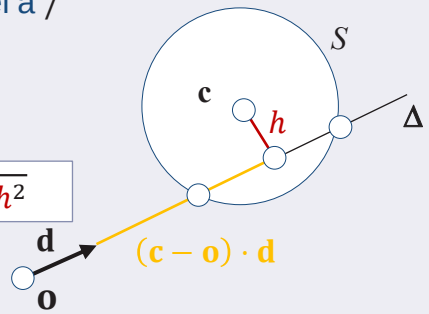
Compute coefficients $at^2 + bt + c = 0$
Compute $\delta = b^2 - 4ac$
If $\delta < 0$ no intersection
Otherwise roots t = $(-b \pm \sqrt{\delta})/2a$

1 appel à /

Méthode géométrique : calcul de $h^2 = \mathrm{d}(\mathbf{S}, \Delta)^2$ et comparaison à r^2

$$h^2 = (\mathbf{c}-\mathbf{o})^2 - \big((\mathbf{c}-\mathbf{o}) \cdot \mathbf{d}\big)^2$$

$$t = (\mathbf{c}-\mathbf{o}) \cdot \mathbf{d} \pm \sqrt{r^2 - h^2}$$



$c \approx 15$
$c \approx 21$

Compute h^2
If $h^2 > r^2$ no intersection
Otherwise $t = (\mathbf{c}-\mathbf{o}) \cdot \mathbf{d} \pm \sqrt{r^2 - h^2}$

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin