

Examen – Surfaces Implicites

1 heure, aucun document autorisé

Toutes les questions portent sur des surfaces implicites $S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$ construites dans l'espace à partir de fonctions de distance signée avec $f > 0$ à l'extérieur. Les réponses seront illustrées à l'aide de notations et de schémas.

Arbres de construction

Proposer un ou plusieurs arbres de construction permettant de modéliser la tour de Pise à l'aide d'une fonction de distance signée f . Détailler les primitives et les nœuds, expliquer comment optimiser les calculs de manière à réduire le coût de la fonction.

Volumes englobants

Soit f la distance signée d'un objet, on cherche à accélérer les calculs à l'aide de volumes englobants

1. Proposer une fonction une fonction $\tilde{f}$ représentant le même objet mais avec un calcul accéléré à l'aide d'une sphère englobante de rayon r représentée par la fonction s .
2. Quelles sont les limitations liées à l'usage des volumes englobants.
3. On définit la fonction g par $g(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})$ si $s(\mathbf{p}) < 0$, $g(\mathbf{p}) = (1 - s(\mathbf{p})/r) \cdot f(\mathbf{p}) + s(\mathbf{p})/r \cdot s(\mathbf{p})$ si $0 < s(\mathbf{p}) < r$, et $g(\mathbf{p}) = r + s(\mathbf{p})$ sinon. Faire un schéma et montrer visuellement que g est continue.
4. En supposant que s et f sont 1-Lipschitziennes, trouver une borne de Lipschitz de g . Quel sera l'avantage été l'inconvénient de g par rapport à $\tilde{f}$?

Déformation et pseudo distance

Soit $n: \mathbf{R}^3 \rightarrow [0,1]$ une fonction de bruit, et $m: \mathbf{R}^3 \rightarrow [0,1]^3$ la fonction de déplacement dans l'espace définie par $m(\mathbf{p}) = (n(\mathbf{p}), n(\mathbf{p} + \mathbf{u}), n(\mathbf{p} + \mathbf{v}))$ où $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ constants. On veut implémenter une déformation ω de type bruit dans l'espace pour déformer une surface implicite : $g = f \circ \omega^{-1}$.

1. Proposer une fonction $\omega^{-1}(\mathbf{p})$ déplaçant au plus les points d'une distance ε , faire un schéma du calcul de $g(\mathbf{p})$.
2. On considère que la fonction de bruit n est λ -Lipschitzienne. Montrer que $1 + 3\varepsilon\lambda$ est une borne supérieure de $\|\nabla g\|$.
3. Au lieu de déformer l'espace, on veut simplement changer légèrement la fonction de distance signée en additionnant le bruit : $h = f + \varepsilon n$: faire un schéma du calcul de $h(\mathbf{p})$.
4. Calculer la borne de Lipschitz de h .
5. Comparer les coûts d'évaluation de g et h et les conséquences en Sphere Tracing