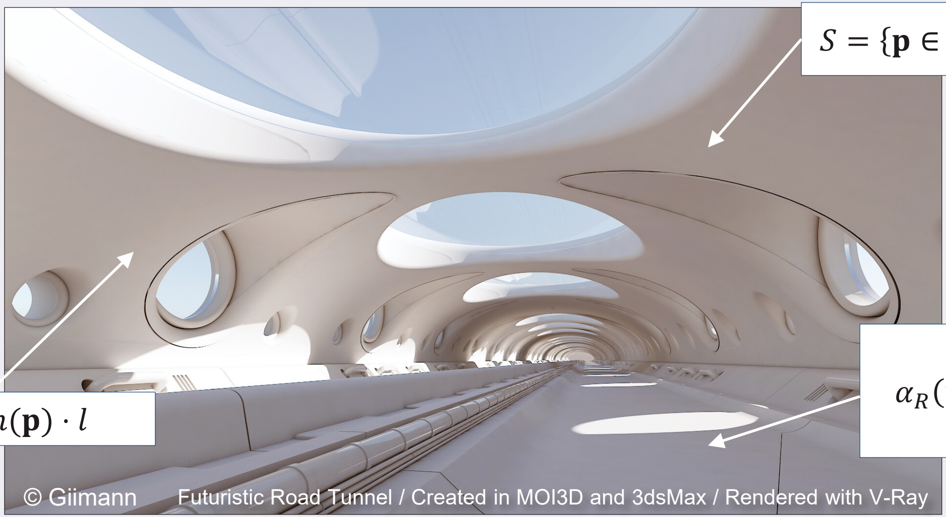
Computer Graphics

From mathematics …

$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$



$d(\mathbf{p}) = n(\mathbf{p}) \cdot l$

$\alpha_R(\mathbf{p}) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \delta_i$

… to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Overview

Deformations

Curves

Surfaces

Types de déformations

Déformations liées au modèle ou libres, locales ou globales
Transformation directe $\omega: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ pour les maillages
Inverse ω^{-1} pour les surfaces implicites

	Liées au modèle	Libres
Globales	Déformations par points de contrôle Surfaces de Bézier Paramètres	Global warping Déformations axiales Formes libres Warping local
Locales		

$\omega: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$

$\omega: \Omega \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$

Déformation des normales

Transformées avec l'inverse du Jacobien transposé

$$\tilde{\mathbf{n}} = (\mathrm{J}_\omega^{-1})^t\ \mathbf{n}$$

$$\mathbf{J}_\omega = (\partial \omega_i / \partial x_j)$$

Démonstration : $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{*t} / \det \mathbf{A}$
et $\mathbf{A}\,\mathbf{u} \times \mathbf{A}\,\mathbf{v} = \mathbf{A}^{*}\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

Co matrice

$$\mathbf{J}_\omega \approx \left(\omega_i(\dots, x_j + \varepsilon, \dots) - \omega_i(\dots, x_j - \varepsilon, \dots)\right) / 2\varepsilon$$

Approximation

Termes $\mathrm{J}_{\omega_{ij}}$

LIRIS CNRS Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Model based deformations

Déplacement de sommets d'un maillage

Algorithme

Soit un sommet $\mathbf{v}$ et son déplacement $\delta\mathbf{v}$

Déplacer les voisins $\mathbf{p}$ de $\mathbf{v}$ selon une fonction $\delta\mathbf{v} \cdot f(\mathbf{p}, \mathbf{v})$

$$\boxed{f(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = g \circ d(\mathbf{p}, \mathbf{v})}$$

Distance géodésique

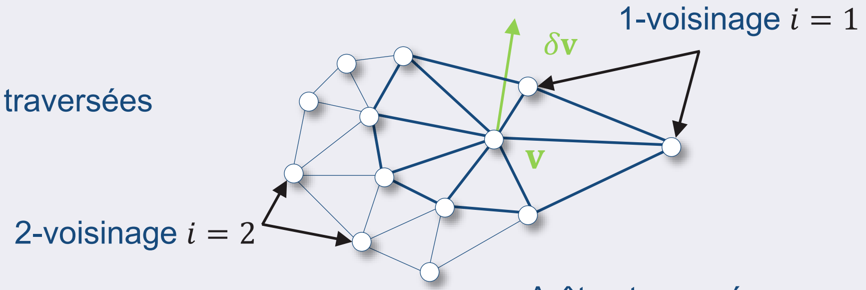
Distance topologique entre $\mathbf{v}$ et $\mathbf{p}$

Distance Euclidienne $d(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = |\mathbf{p} - \mathbf{v}|$

Distance topologique

$d(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ est fonction du nombre d'arêtes traversées

Voisinage topologique de $\mathbf{v}$



Arêtes traversées

$$\boxed{f(i) = \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^k}$$

Nombre d'arêtes maximal

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Global deformations

Transformations affines

Fondamentaux

Rotation, homothétie, translation sont des déformations globales particulières
Inversibles : faciles en mettre en œuvre dans le cadre des surfaces implicites

$$\boxed{\omega(\mathbf{p}) = \mathbf{M}\,\mathbf{p} + \mathbf{t}}$$

Rotation et homothétie   Translation

Remarques

Volume constant lorsque $|\mathbf{J}_\omega| = 1$
Pour les rotations on a simplement $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{R}\,\mathbf{n}$
Pour les homothéties, $\mathbf{M}$ est diagonale et $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{n}$

Pour une rotation, $\mathbf{R}$ est orthogonale
donc $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^t$ donc $(\mathbf{R}^{-1})^t = \mathbf{R}$

Trivial, $\mathbf{M}^{-1} = \mathrm{diag}(1/\mathbf{M}_k)$

A. H. Barr. Global and Local Deformations of Solid Primitives. *Computer Graphics* (Siggraph Proceedings), **8**, 21–30, 1984.

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Transformations globales

Déformation de l'espace dont on connait l'expression mathématique [Barr 1984]

Torsion hélicoïdale

Déformation en hélice autour d'un axe $\omega(\mathbf{p}) = \mathrm{R_z}\big(\alpha(\mathbf{p})\big)\ \mathbf{p}$

$$\omega(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha - y\cos\alpha \\ z \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{T} z\right)$$

Ecrasement longitudinal

Déformation radiale de facteur $\rho(z)$

$$\omega(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} x\,\rho(z) \\ y\,\rho(z) \\ z \end{pmatrix}$$

$$J_\omega(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \rho(z) & 0 & x\rho'(z) \\ 0 & \rho(z) & y\rho'(z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_\omega^{-1}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{y\rho'(z)}{\rho(z)-1} \\ 1 & 0 & \dfrac{x\rho'(z)}{\rho(z)-1} \end{pmatrix}$$

A. H. Barr. Global and Local Deformations of Solid Primitives. *Computer Graphics* (Siggraph Proceedings), **8**, 21–30, 1984.

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Déformations axiales

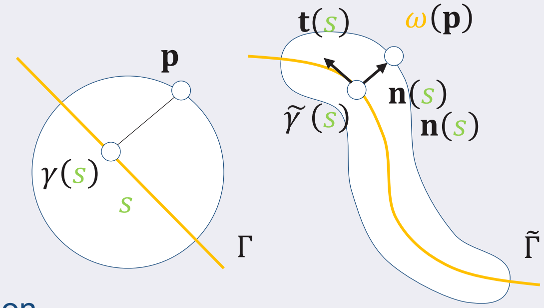
Transformations le long d'une courbe

- Déformation de l'espace autour d'une courbe de contrôle [Lazarus 1994]
- Paramètres de torsion ou d'écrasement

$$\omega(\mathbf{p}) = \tilde{\gamma}(s) + u\,\mathbf{n}(s) + v\,\mathbf{b}(s)$$

Paramètre de γ de la projection de $\mathbf{p}$ sur Γ

Normale et bi normale



Extensions

- Paramètres de torsion ou d'écrasement

Matrice de rotation selon la tangente

$$\omega(\mathbf{p}) = \tilde{\gamma}(s) + \rho(s)\,\mathbf{R}\big(\mathbf{t}(s), \theta(s)\big)\big(u\,\mathbf{n}(s) + v\,\mathbf{b}(s)\big)$$

Ecrasement

Angle de rotation

F, Lazarus, S, Coquillart and P, Jancène. Axial deformations: an intuitive deformation technique, *Computer-Aided Design*, **26** (8), 1994

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Local deformations

Déformations locales

Construction

Déformation (globale) δ combinée à une fonction d'atténuation g à support compact

$$\omega(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + g(\mathbf{p})\,\delta(\mathbf{p})$$

Fonction à support compact

Déformation globale

Etirement atténué sur une région sphérique

$$\delta(\mathbf{p}) = \mathbf{t}$$

Translation constante

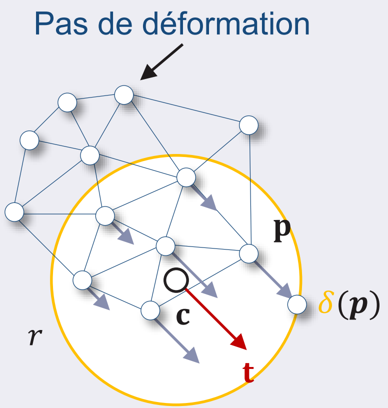
$$g(\mathbf{p}) = s \circ d(\mathbf{p}, \mathbf{c})$$

$$s(d) = (1 - d^2)^2$$

Atténuation [Wyvill1999]

$$d(\mathbf{p}) = |\mathbf{p} - \mathbf{c}|$$

Distance Euclidienne



Généralisation à toute fonction à support compact

F Lazarus, S Coquillart, P Jancène. Axial deformations: an intuitive deformation technique, *Computer-Aided Design*, **26** (8), 1994
B. Wyvill, A. Guy, E. Galin. Extending the CSG-Tree. *Computer Graphics Forum*. **18** (4), 149 – 158, 1999

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Déformations de Formes Libres

Caractérisation

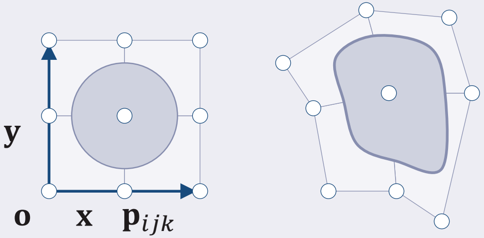
Déformation dans l'espace $\omega : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ par déplacement des points de contrôle sur une boite

$$\mathbf{p}_{ijk} = \mathbf{p}_0 + \frac{i}{n}\mathbf{x} + \frac{j}{n}\mathbf{y} + \frac{k}{n}\mathbf{z}$$

$$u = \left(\mathbf{p}_{ijk} - \mathrm{o}\right) \cdot \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{q}(u,v,w) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w)\, \mathbf{p}_{ijk}$$

$$B_i^n(u) = C_n^i\, u^i\, (1-u)^{n-i}$$



Propriétés

Déformations globales et locales
Déformation à l'intérieur de l'espace défini par les points de contrôle

Extensions

Grilles non parallélépipédiques [Coquillart 1990]

T. Sederberg, S. Parry. Free-form deformation of solid geometric models. *Computer Graphics* (Siggraph), **20**, 151–160, 1986.
S. Coquillart. Extended free-form deformation : A sculpturing tool for 3D geometric modeling. *Computer Graphics* (Siggraph), **24**, 187–196, 1990.

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Déformations multiples

Définition

L'objet est crée en déformant progressivement une surface S_0

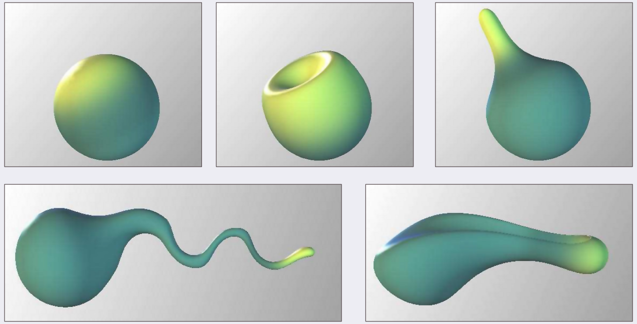
Composition de n déformations de l'espace $\omega = \omega_{n-1} \circ \cdots \circ \omega_0$

$$\boxed{\omega_k(\mathbf{p}) = \mathrm{e}^{f(\mathbf{p}) \ln \mathbf{M}}}$$

$$\boxed{f(\mathbf{p}) = g \circ d(\mathbf{p})}$$

Fonction d'atténuation

Matrice de transformation



A. Angelidis, M.-P. Cani, G. Wyvill, S. King. Swirling-Sweepers: Constant Volume Modeling, *Graphical Models* **68** (4), 324-332, 2006.

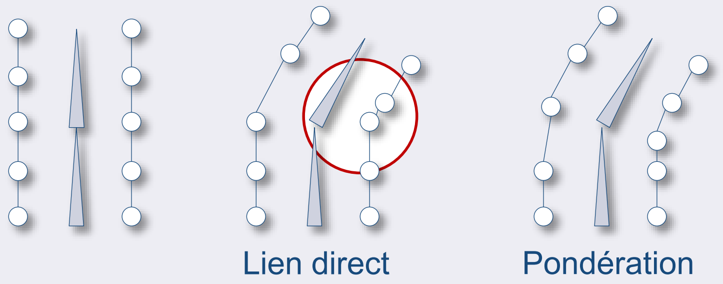
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Character animation

Skinning et rigging

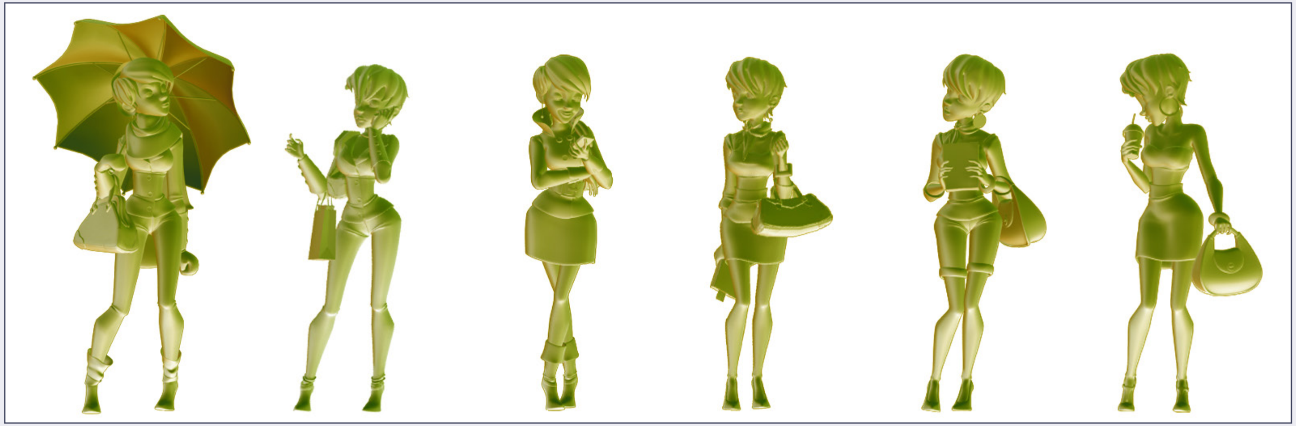
Les sommets du maillage sont attachés aux éléments du squelette d'animation



$$\omega(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i \, \mathbf{M}_i \, \mathbf{p}$$

Poids   Matrice locale

En bougeant les point de contrôle du squelette, le maillage suit la déformation



Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin